This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

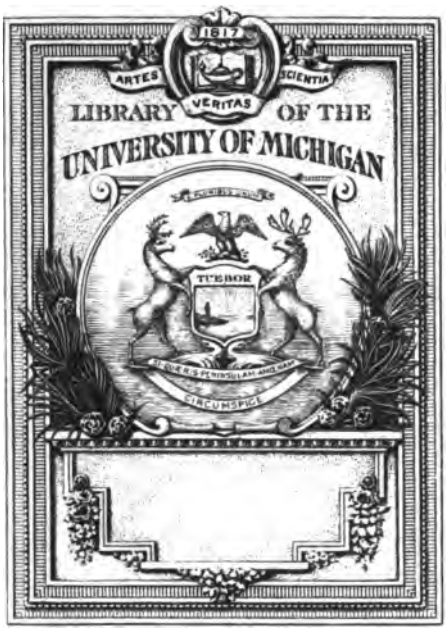
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
STARCUMSPICE

Pyth. Rücke. 1814
QA
31
.E88
S734
1798a

Auszug

aus

Robert Simson's

Lateinischer und Englischer Uebersetzung

der

ersten sechs Bücher

und

des eilften und zwölften Buches

der

Elemente des Euklides

enthaltend

die von ihm getroffenen Abänderungen und eingeschalteten Sätze, nebst den geometrischen und critischen Noten

als ein Anhang

zu der

Lorenzischen

deutschen Uebersetzung sämtlicher Elemente

herausgegeben

von

Johann Andreas Matthias,

Domvicarius und Lehrer an der Domschule zu Magdeburg.

Mit drey Kupfertafeln.

Magdeburg,

bey Georg Christian Keil 1799.

Hist. of Sci
Sch. C
9-25430
22346

Vorrede.

Robert Simson, von dessen Leben und mathematischen Werken uns noch eine genaue, seiner Verdienste würdige, Geschichte fehlt, widmete einen beträchtlichen Theil seines langen, arbeitsamen Lebens den ehrwürdigen Ueberresten des geometrischen Alterthums. Nicht allein führte er noch aus demselben vorhandene Werke zu ihrer ursprünglichen Lauterkeit, der sie von Nichtgeometern beraubt worden waren, zurück, sondern stellte auch verloren gegangene, deren Inhalt in wenigen, aus ihnen übrig gebliebenen Sätzen angedeutet war, wieder her. Jenes leistete er unter andern in seiner lateinischen und Englischen Ausgabe der sechs ersten Bücher, des eilften und zwölften Buches der Elemente. Die Veränderungen, welche er in ihnen traf, sind, wenn sich auch gegen

einige noch Erinnerungen machen ließen, dennoch Denkmähler seines im Geiste der Alten ausgebildeten Talents, und verdienen die Beachtung aller Verehrer der Griechischen Geometrie und eine dankbare Aufnahme in die Vorträge unserer Geometer. Dieß war der Grund, warum Herr Professor Lorenz eine besondere Sammlung gedachter Veränderungen wünschte, die ich auf sein achtungswürdiges Anrathen unternahm, und jetzt in einer Uebersetzung den Freunden des Euklides vorlege. Die Sammlung kann als ein Anhang zu der neuen Ausgabe angesehen werden, welche der Herr Professor von seiner Uebersetzung sämtlicher Bücher der Elemente veranstaltet hat.

Diese Veränderungen, in welchen Euklides Geist athmet, bestehen theils in Verbesserungen der Definitionen, der Lehrsätze und deren Beweise, die der Grundtext hat, theils in eingeschalteten erheblichen Zusätzen und Lehrsätzen, welche entweder Lücken des Griechischen Originals, wie es uns überliefert worden, ausfüllen, oder jenen Verbesserungen zum Grunde liegen sollen. Simsons Scharfsinn hat sich am fünften, eilften und zwölften Buche besonders verherrlicht; das fünfte hat erst durch ihn die Vollendung wieder erhalten, die ihm der Grieche unstreitig verliehen hatte.

Simson's lateinische Ausgabe der oben gedachten acht Bücher der Elemente ist älter, als die Englische; wie sich aus der Note schließen läßt, welche sich in dieser beym 1. S. des 11. B. findet. Bey meiner Sammlung mußt' ich der lateinischen vorzüglich folgen; obgleich ich auch die Englische benutzte, und daraus diejenigen Sätze und Noten, worin sie sich von jener unterscheidet, in so fern sie mir nützlich zu seyn schienen, aushob. Alles, was bloß aus dem Englischen entlehnt worden, ist mit * bezeichnet.

In beyden Ausgaben folgen die Anmerkungen, worin Simson seine Veränderungen rechtfertigt, hinter den Uebersetzungen der acht Bücher. Der bequemere Gebrauch aber forderte, hinter jeden Satz die Note zu stellen, welche von den in ihm gemachten Aenderungen, oder von seiner Einschaltung Rechenschaft ablegt. Was aus dem Texte beygebracht worden, ist mit Text, die Anmerkungen dazu sind mit Note angedeutet.

Das Aeußere meiner Uebersetzung ist wie in der lorenzischen. Wie in dieser, wird in der Aussage der Sätze zugleich auf die Figur verwiesen, auf welche sie bezogen werden; die Sätze, Erklärungen und Axiome, worauf die Beweise beruhen, sind in runden Klammern mit denselben Zeichen angeführt, und überall dieselben Abkürzungszeichen gebraucht. Was in Klammern, wie [ ], stehet, rührt von mir her; theils

theils sind es Anmerkungen, in welchen ich Einiges von dem, was im Texte oder in den Noten gesagt wird, erläutern wollte, theils, des Folgenden wegen, Hinweisungen auf den Grundtext, oder auf die deutsche Uebersetzung. Hin und wieder kommt die Bezeichnung, Simſ. T., vor; diese bezieht sich auf das, was Simson in seinen Text eingeschaltet hat. Uebrigens sind die dem Simsonschen Werke eigenen Sätze mit großen lateinischen Buchstaben, wie im Originale bezeichnet, und zugleich ist dabey bemerkt worden, hinter welche Sätze des Grundtextes sie gestellt werden müssen.

Wo in dieser Sammlung bey einem Satze auf keine Figur verwiesen wird, da wird immer die in der Lorenzischen Uebersetzung dazu gehörige zum Grunde gelegt. Diejenigen Figuren aber, auf welche gewiesen wird, sind nach denen, die sich im Simsonschen Werke finden, kopirt worden.

In der Note beym 24. Satze lese man (Fig. 20^2) statt (Fig. 25.)

Euklides Elemente.

Erstes Buch.

Erklärungen.

*. Note zur 1 bis 6 E.

Um die von einem Punkte, einer Linie und Fläche aufgestellten Erklärungen richtig zu verstehen, muß man einen Körper, das heißt, eine Größe, betrachten, welche Länge, Breite und Dicke hat. Jene nähmlich finden sich am Körper; dessen Beachtung also auf ihre Erklärungen führt.

Die Grenze, oder die Grenzen, welche einen Körper einschließen, heißen Flächen; oder, die Grenze welche zwey, einander berührenden, Körpern gemein ist, oder, welche einen und denselben Körper in zwey zusammenhängende Theile theilt, heißt Fläche. So wird (Fig. 1.) BCGF, eine der den Körper ABCDEFGH einschließenden Grenzen, oder, die diesem und dem Körper BKLCFNMG gemeinschaftliche Grenze, welche daher

sowohl an dem einen als auch an dem andern ist, Fläche genannt, und hat keine Dicke. Denn hätte sie Dicke; so müßte solche ein Theil, entweder der Dicke des Körpers AG, oder des Körpers BM, oder beyder Körper zugleich seyn; weil, wenn man diesen von AG abrückte, die BCGF dieselbe Grenze des Körpers AG bleiben würde. Eben so wenig kann sie ein Theil der Dicke des Körpers AG seyn; weil, wenn man AG vom Körper BM wegrückte, dennoch die BCGF die Grenze von BM bleiben würde. Daher hat die Fläche BCGF keine Dicke, sondern bloß Länge und Breite.

Die Grenze einer Fläche heißt Linie; oder, eine Linie ist die gemeinschaftliche Grenze zweyer stetig an einander liegenden Flächen; oder, die Linie theilt eine und dieselbe Fläche in zwey zusammenhängende Theile. Wenn also BC eine der Grenzen ist, welche die Fläche ABCD einschließen, oder, wenn BC die gemeinschaftliche Grenze dieser und der mit ihr zusammenhängenden Fläche KBCL ist: so heißt solche Grenze BC eine Linie, und hat keine Breite. Denn hätte sie Breite; so müßte solche von der Breite, entweder der Fläche ABCD, oder der Fläche KBCL, oder beyder Flächen zugleich, ein Theil seyn. Nun ist sie kein Theil der Breite der Fläche KBCL; denn rückte man diese von der Fläche ABCD ab, so bliebe BC doch dieselbe Grenze von ABCD. Eben so wenig kann die Breite, welche BC nach der Voraussetzung haben soll, ein Theil der Breite der Fläche ABCD seyn; weil, wenn von KBCL die ABCD weggerückt würde, jene doch die BC zur Grenze behielte. Folglich hat BC keine Breite. Und da die Linie BC in einer Fläche ist; eine Fläche aber, wie vorhin gezeigt wurde, keine Dicke hat: so hat eine Linie weder Breite noch Dicke, sondern bloß Länge.

Die Grenze einer Linie heißt Punkt; oder, ein Punkt ist die gemeinschaftliche Grenze, das Aeußerste, zweyer stetig an einander hängenden Linien. Ist B das

Aeußerste

Aeußerste der Linie AB, oder die gemeinschaftliche Grenze beyder Linien AB, KB: so heißt B ein Punkt, und hat keine Länge. Denn hätte B Länge; so müßte solche von der Länge, entweder der Linie AB, oder der Linie KB, ein Theil seyn. Nun kann sie kein Theil der Länge der letzten Linie seyn; weil, wenn die KB von der AB abgerückt würde, diese den Punkt B zur Grenze, zu ihrem Aeußersten, behielte. Auch kann die angenommene Länge des Punktes B kein Theil der Länge der AB seyn; weil B, wenn AB von KB abgerückt würde, doch Grenze der KB bliebe. Folglich hat der Punkt B keine Länge. Und da ein Punkt in einer Linie ist, diese aber weder Breite noch Dicke hat: so hat ein Punkt weder Länge, noch Breite, noch Dicke.

Auf diese Weise macht man sich die vom Punkte, von der Linie und Fläche gegebenen Erklärungen verständlich.

7. Text: Eine ebene Fläche, Ebene, ist, in welcher die zwischen jeden zwey, darin beliebig genommenen, Punkten gezogene gerade Linie ganz liegt.

Note: Statt der in den Griechischen Abschriften befindlichen Erklärung von der Ebene ist hier eine deutlichere gegeben worden. Sie sagt von der Ebene eine Eigenschaft aus, welche davon in den Elementen offenbar vorausgesetzt wird; die nähmlich, daß sich in der Ebene von jedem Punkte zum andern eine gerade Linie ziehen lasse, welche ganz in derselben liege.

8. Text: „Ein ebener Winkel heißt die Neigung, welche zwey Linien gegen einander haben, die sich in einer Ebene treffen, ohne in Einer geraden Linie zu liegen."

Note: Der Urheber der im Grundtexte befindlichen Erklärung scheint die Absicht gehabt zu haben, von dem Winkel eine allgemeine Erklärung zu geben, die nicht bloß von dem von zwey geraden Linien eingeschlossenen Winkel, sondern auch von demjenigen gölte, welchen, wie Einige sich vorstellen, eine gerade und eine krumme

Linie, oder zwey krumme Linien, die einander in einer Ebene treffen, einschließen. Aber, obgleich der Sinn des Ausdrucks, ἐπ' εὐθείας, in Einer geraden Linie, oder gerade fort an einander liegend, völlig klar ist, sobald er von zwey geraden Linien gebraucht wird; so sieht man doch nicht ein, was eigentlich damit gesagt seyn soll, wenn es von einer geraden und krummen Linie, oder von zwey krummen Linien heißt: Sie liegen gerade fort an einander. Wahrscheinlich rühren diese Erklärung und mehrere andere von einem der Geometrie minder kundigen Herausgeber der Elemente her. Dahin gehört nicht nur die Erklärung von dem Winkel des Kreisabschnitts, sondern auch was vom Winkel des Halbkreises und den Winkeln der Kreisabschnitte im 16. und 31 S. des 3 B. behauptet wird. Solche Erklärungen haben wir in unserer Uebersetzung, zumahl da sie ohne allen Nutzen sind, mit dem Zeichen (" „) unterschieden.

13. Text: "Grenze eines Dinges ist sein Aeußerstes."

17. Text: Der Durchmesser eines Kreises ist eine durch den Mittelpunkt gezogene und an beyden Endpunkten von dem Umkreise begrenzte gerade Linie.

Note: Diese Erklärung hat in allen Exemplaren den Zusatz: "welche auch den Kreis halbirt." Wir haben ihn weggelassen, weil er nicht zur Erklärung selbst gehört, sondern eine Folge aus derselben ist. Proclus beweist sie mittelst der Vorstellung, daß das eine von den Segmenten, worein der Durchmesser den Kreis theilt, auf das andere gelegt werde. Offenbar folgt, daß beyde Segmente congruent seyn müssen. Denn im entgegengesetzten Falle wären die vom Mittelpunkte nach dem Umkreise gezogenen geraden Linien nicht alle gleich. Dasselbe läßt sich leicht aus dem 31. und 24. S. des 3. B. beweisen. Denn nach jenem Satze sind die Halbkreise ähnliche Abschnitte, und nach diesem sind ähnliche Kreisabschnitte congruent, also gleich.

19.

19. Text: "Ein Kreisabschnitt ist eine vom Umkreise und einer geraden Linie eingeschlossene Figur."

33. Text: Ein Rhomboid heißt diejenige [vierseitige] Figur, deren gegenüber liegende Seiten gleich sind, die aber weder gleichseitig noch rechtwinklig ist.

Note: Die Erklärung im Grundtexte enthält ein überflüssiges Merkmahl; denn in jeder vierseitigen Figur, deren gegenüber liegende Seiten gleich sind, sind auch die gegenüber liegenden Winkel gleich, und umgekehrt.

Es sey [Fig. beym 33. S. 1. B.] ABCD eine vierseitige Figur, worin die Seiten BD, AC, so wie AB, CD gleich sind. Ziehe BC. Hier ist AB = CD, BC = BC, AC = BD; folglich (1, 8. S.) ABC = BCD. Daher ist (1, 4. S.) BAC = BDC; auch DBC = BCA. Folglich ABD = DCA.

Sind in der vierseitigen Figur ABDC die gegenüber liegenden Winkel BAC, BDC, so wie ABD, DCA gleich: so sind auch die gegenüber liegenden Seiten gleich. Denn da (1, 32. S.) alle Winkel gedachter Figur zusammen vier rechte Winkel betragen, und ABD + BAC = BDC + DCA; so ist ABD + BAC = 2 R; folglich BD (1, 28. S.) mit AC parallel. Nun ist auch ABD + BDC = 2 R; folglich BA mit DC parallel. Daher ist ABCD ein Parallelogramm; folglich (1, 34. S.) die gegenüber liegenden Seiten, BA, DC und BD, AC gleich.

Deßwegen haben wir das eine, die Winkel betreffende, Merkmahl aus obiger Erklärung weggelassen.

Grundsätze.

10. Text: Zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein.

11. Text: Alle rechte Winkel sind einander gleich.

12. "Werden zwey gerade Linien von einer dritten so getroffen, daß die innern an einerley Seite der treffenden Linie liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey

rechte

rechte sind: so laufen die zuerst gedachten Linien, wenn sie immer fort verlängert werden, auf der Seite jener innern Winkel zusammen. Vergleiche die Note zum 29. S. des 1. B.

Der 5. Satz.

Text: Zusatz: Daher ist jeder gleichseitige Triangel auch gleichwinklig.

Der 7. Satz.

Text: Lehrsatz: Auf einerley Grundlinie, AB, und an einerley Seite derselben können nicht zwey Triangel, ABC, ABD, errichtet werden, welche gleiche, von einerley Endpunkte der Grundlinie begrenzte, Seiten, AC=AD, BC=BD, haben.

Ziehe CD. Der Gipfel D des einen Triangels ADB liegt entweder außerhalb oder innerhalb des andern Triangels ABC.

Erster Fall. Der Gipfel D des Triangels ADB liege außerhalb des Triangels ABC (wie in der deutschen Uebersetzung.)

Zweyter Fall. Der Gipfel (Fig. 21.) D des Triangels ADB liege innerhalb des Triangels ACB.

Verlängere AC nach E; AD nach F. Da AC=AD, so ist (5. S.) ECD=FDC. Nun ist ECD>BCD; also FDC>BCD; also um so mehr BDC>BCD. Da aber BC=BD; so ist BDC=BCD; welches dem vorigen Schlusse BDC>BCD widerspricht.

Für einen dritten Fall, worin der Gipfel D des Triangels ADB in eine Seite des Triangels ACB fiele, ist kein Beweis nöthig.

Note: Der Beweis dieses Satzes unterscheidet zwey Fälle, von denen der weggelassene Fall eben so nöthig ist, wie der, welcher allein im Grundtexte angeführt

führt wird. Daß aber gedachter Fall anfänglich auch im Griechischen vorhanden gewesen seyn müsse, erhellet aus des 5. Satzes zweytem Theile, welcher in den Elementen sonst nirgends, außer hier, gebraucht wird. Denn der zweyte Theil des 5. Satzes folgt klar aus dessen erstem, wenn man damit den 13. S. des 1. B. verbindet. Er wurde daher wegen eines zwischen dem 5. und 13. befindlichen Satzes hinzugesetzt. Dieß mußte wegen des 7. S. geschehen seyn, weil nur dieser es nöthig machen konnte. Dazu kommt, daß die nach dem Arabischen verfertigte Version für den mehrgedachten Fall einen besondern Beweis hat. Selbst Proclus erkennt den 2. Theil des 5. S. um des 7. Willen für einen Zusatz, aber aus dem sonderbaren Grunde, „damit man den wider den 7. und 16. S. des 1. B. gerichteten Einwürfen begegnen könne;“ als wenn der ausgelassene Fall, wie er meynt, ein Einwurf wider den Satz selbst wäre. Man sehe, wenn es beliebt, Proclus 5. und 7. S.; denn ich mag seine unbedeutenden Anmerkungen hier nicht anführen.

Ueber dieß haben wir den 7. S., seinem Sinne unbeschadet, anders als im Grundtexte ausgedrückt; weil ihn eine wörtliche Uebersetzung dem Anfänger unverständlich macht.

Der 8. Satz.

Text: Lehrsatz: Sind in zwey Triangeln (Fig. 3.), ABC, DEF, zwey Seiten zweyen Seiten, AB der DE, AC der DF, auch die Grundlinien, BC, EF, einander gleich: so ist auch ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, die von gleichen Seiten eingeschlossen werden, gleich.

Legt man den △ ABC so auf den △ DEF, daß der Punkt B auf E, BC längs EF fällt; so fällt, weil BC = EF, der Punkt C auf F. Fällt aber BC mit

EF

EF zusammen; so muß auch BA mit ED, AC mit DF zusammenfallen. Denn fielen zwar die Grundlinien BC, EF, aber nicht auch die Seiten BA, AC mit den Seiten ED, DF zusammen, sondern hätten eine von der Lage der letzten verschiedene Lage, wie EG, FG: so wären auf einer und derselben Grundlinie EF, an einerley Seite solcher Linie, zwey Triangel DEF, GEF errichtet, die gleiche, von einerley Endpunkte der Grundlinie begrenzte, Seiten hätten. Da dieß aber (7. S.) unmöglich ist; so müssen, wenn die Grundlinien BC, EF zusammenfallen, auch die Seiten BA, ED, so wie AC, DF zusammenfallen. Also deckt auch der Winkel BAC den Winkel EDF; also BAC = EDF.

Der II. Satz.

Text: Zusatz: Daher läßt sich zeigen, daß zwey gerade Linien keinen Abschnitt gemein haben.

Denn gesetzt, die beyden geraden Linien (Fig. 4.) ABC, ABD hätten, wenn's möglich ist, den Abschnitt AB gemein: so errichte im Punkte B den Perpendikel BE auf AB. Da ABC eine gerade Linie ist; so ist (10. S.) CBE = EBA. Nun ist auch ABD eine gerade Linie; folglich DBE = EBA; also DBE = CBE, der Theil dem Ganzen gleich; welches unmöglich ist. Folglich können zwey gerade Linien keinen Abschnitt gemein haben.

Note: Dieser Zusatz ist deßwegen mitgetheilt worden, weil er zum Beweise des 1. S. des 11. B. und bey andern Sätzen nöthig ist.

Der 15. Satz.

Text: 1. Zusatz: Hieraus erhellet offenbar, daß zwey gerade Linien, welche einander schneiden, um den

den Durchschnittspunkt herum Winkel machen, die zusammen vier rechten Winkeln gleich sind.

2. Zusatz: Und daher sind alle um Einen Punkt herum liegende Winkel zusammen vier rechten Winkeln gleich.

* Und folglich sind alle Winkel, welche von einer beliebigen Anzahl gerader Linien, die sich in Einem Punkte treffen, gebildet werden, zusammen vier rechten Winkeln gleich.

[Simson hat hier eine nothwendige Bedingung vergessen, daß nähmlich die geraden Linien alle in Einer Ebene liegen müssen.]

Der 20. und 21. Satz.

Note: Proclus, in seinem Commentare, bemerkt bey diesen Sätzen, daß die Epicuräer einen Beweis für den ersten derselben für überflüssig gehalten hätten, weil der Satz schon an sich völlig klar sey. Er antwortet darauf: Obgleich es augenscheinlich sey, daß zwey Seiten eines Triangels zusammen größer als die dritte sind: so müsse doch die Geometrie, als Wissenschaft, beweisen, wie es möglich sey. Allein die einzige richtige Antwort, die sich auf obigen und andere, gegen ähnliche an sich klare Sätze, gerichtete Einwürfe geben läßt, ist wohl: Man muß die Anzahl der Axiome nicht ohne Noth vermehren.

Der 22. Satz.

Note: Man hat es getadelt, daß Euklides von den bey Auflösung dieser Aufgabe gebrauchten Kreisen nicht bewiesen habe, daß sie sich schneiden. Dieß aber erhellet aus der Bedingung, die er ausdrücklich hinzusetzt, daß (Fig. 5.) von den drey gegebenen geraden Linien, DF, FG, GH, jede zwey zusammen größer als die dritte

seyn

seyn müssen. Daraus leuchtet es jedem Anfänger ein, daß der um den Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FD gezeichnete Kreis die gerade Linie FH zwischen ihren Endpunkten F, H scheiden muß. Denn FD ist kleiner als FH. Auch ergibt sich daraus, daß der um den Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GH oder GM gezeichnete Kreis die gerade Linie DG zwischen ihren Endpunkten G, D schneidet. Folglich müssen beyde Kreise einander schneiden, weil FD + GH > FG. Daß beyde Kreise einander schneiden, folgt ungezwungener aus Euklides Bestimmung, als aus derjenigen, welche Thomas Simpson in seinen Elementen der Geometrie Seite 49. aus der Euklidischen herleitet und statt dieser setzt; um damit zu ergänzen, was der Grieche ausgelassen hatte, und woraus er ihm einen Vorwurf macht. Eine von den drey gegebenen geraden Linien müsse nähmlich kleiner als die Summe, aber größer als der Unterschied der beyden übrigen seyn. Daraus schließt er, daß sich die Kreise in einem Falle schneiden, und setzt alsdann hinzu, es lasse sich in jedem andern Falle auf dieselbe Art beweisen. Allein die gerade Linie GM, welche nach ihm von der geraden Linie GF weggenommen werden soll, kann größer als GF seyn, wie die Figur zeigt, und dann muß man statt seines Beweises einen andern führen.

Der 24. Satz.

Text: Von den beyden Seiten DE, DF sey DE die Seite, welche nicht größer ist als die andere DF.

Note: Das heißt: Von den beyden Seiten DE, DF nehme man die, welche nicht größer ist, als die andere, und setze an sie, an einen in ihr gegebenen Punkt, den Winkel EDG = BAC.

Macht man diese Einschränkung nicht, so muß man, wie Campanus und Andere gethan haben, den Beweis für drey verschiedene Fälle führen.

* Tho-

* Thomas Simpson erinnert, Seite 262 der zweyten 1760 erschienenen Ausgabe seiner Elemente der Geometrie, in einer Note, daß es hätte bewiesen werden müssen, daß (Fig. 6.) der Punkt F unterhalb der Linie EG falle. Euklides überging den Beweis wahrscheinlich deßwegen, weil dieß Jedem leicht einleuchtet. Denn, da DG = DF; so ist G in der Peripherie eines um D mit dem Halbmesser DF gezeichneten Kreises; und weil, wegen EDG > EDF, DG überhalb DF fällt; so muß G in dem Theile solches Umkreises seyn, der über der geraden Linie EF liegt.

[Die drey Fälle, für welche man den Beweis führen muß, wenn man obige nähere Bestimmung nicht hinzusetzt, sind folgende:

a) EG = BC fällt über EF; wie im Grundtexte.

b) EG = BC fällt (Fig. 7.) auf EF; da dann offenbar EG, das ist BC, größer als EF ist.

c) EG = BC fällt (Fig. 7.) unter EF. Da (21. S.) EG + GD > EF + FD, und GD = FD; so ist EG, das ist BC, größer als EF.]

Der 29. Satz.

Note: Bey dem Satze, der gewöhnlich als die 5. Forderung, oder als das 11, von Einigen als das 12. Axiom aufgestellt wird, und wovon vorliegender Lehrsatz vorzüglich abhängt, haben sowohl die alten als auch die neuen Geometer viele Schwierigkeiten gefunden. Auf der einen Seite scheint es, als könne er unter die Axiome nicht gezählt werden, und auf der andern Seite läßt sich doch für ihn kein völlig befriedigender Beweis führen. Ohne eine Erläuterung, die wir Anfängern auf die faßlichste Weise im Nachstehenden geben wollen, ist er nicht ganz verständlich.

Zuerst

Zuerst sieht Jeder ein, daß (Fig. 8.) zwey gerade Linien AB, CD in einer Ebene, welche mit einer und derselben Linie AC rechte Winkel A, C machen, von einander gleich weit abstehen, das ist, weder sich irgendwo nähern, noch irgendwo sich von einander entfernen, so weit man sie auch verlängern mag. Das Gegentheil hievon hat aber auch noch Niemand behauptet. Denn wenn man sich vorstellen wollte, die AB nähere sich nur im Geringsten der CD, so müßte man sich zugleich vorstellen, AB sey gegen AC, auf der Seite, wo CD befindlich ist, mehr geneigt, als auf der entgegengesetzten. Dieß ist, weil AB mit AC bey A rechte Winkel macht, unmöglich. Dasselbe muß von jeden zwey geraden Linien (Fig. 9.) AB, CD gelten, welche mit einer dritten EAC auf einerley Seite derselben gleiche Winkel EAB, ECD machen, weil sich zeigen läßt, daß sie mit irgend einer geraden Linie rechte Winkel einschließen. Man halbire AC in F, fälle aus F den Perpendikel FG auf AB, der die CD in H treffe. Da in den Triangeln AFG, CFH (15. S.) GAF = HCF, AFG = CFH, und AF = FC; so ist (26. S.) AGF = CHF = R. Folglich machen die geraden Linien BG, DH mit der GH rechte Winkel; folglich müssen AB, CD überall gleich weit von einander abstehen.

Zweytens ist klar, daß zwey von einerley Punkte ausgehende gerade Linien immer mehr und mehr divergiren, so daß die kleinste Entfernung derselben von einander, zwischen den Endpunkten der einen und der andern Linie genommen, größer als jede gegebene gerade Linie wird. Ist z. B. bey einer Länge von zehn Fuß, die man vom Ausgangspunkte an auf einer der Linien nimmt, der Abstand derselben von einander Ein Fuß, so wird solcher Abstand, wenn auf erstgedachter Linie die genommene Länge um andere zehn Fuß vergrößert wird, alsdann um einen Fuß wachsen, in derselben Verhältniß, wie bey der ersten Länge; und so immer fort. Dieß hängt von der

Natur

Natur der geraden Linie ab, deren Punkte alle nach einer und derselben Gegend zu liegen, und läßt sich aus dem Vorigen nicht streng beweisen.

Dieß vorausgeschickt, seyen nun (Fig. 10.) AB, FD zwey gerade Linien, welche eine dritte gerade Linie EFH schneide, und mit ihnen innere an einerley Seite liegende Winkel, BEF, EFD mache, welche zusammen kleiner als zwey rechte sind: so werden AB, FD auf eben der Seite, wo gedachte Winkel sind, zusammenlaufen.

An dem Punkte F in der FH mache man einen äußern Winkel GFH, welcher dem innern BEF gleich, und mit ihm auf derselben Seite der EFH sey: so stehen nach dem Vorhergehenden EB, FG überall gleich weit von einander ab. Da $HFG + GFE = 2\,R$, so ist auch $BEF + EFG = 2\,R$. Aber $BEF + EFD < 2\,R$; folglich $EFG > EFD$, und FD fällt zwischen die überall gleich weit von einander abstehenden oder parallelen Linien EB, FG. Verlängert man nun die aus einerley Punkte F ausgehenden FG, FD: so werden sie endlich weiter von einander abstehen, als die Paralleli-nien FG, EB, und folglich wird sich FD irgend einmahl auf die Seite der EB hin erstrecken, welche der, auf welcher F liegt, entgegengesetzt ist, das heißt, FD wird mit EB zusammentreffen.

Der 32. Satz.

Text: 1. Zusatz: (Fig. 11.) Alle innere Winkel einer geradlinigen Figur betragen, wenn dazu vier rechte Winkel kommen, zwey Mahl so viele rechte Winkel als die Figur Seiten hat.

Jede geradlinige Figur ABCDE läßt sich in so viele Triangel theilen, als sie Seiten hat, wenn man von einem innerhalb derselben befindlichen Punkte F nach den Winkelspitzen gerade Linien ziehet. Alle Winkel dieser Triangel machen zusammen zwey Mahl so viele rechte

Winkel,

Winkel, als Triangel, das ist, als Seiten der Figur sind. Nun sind gedachte Winkel den Winkeln der Figur gleich, wenn hiezu die Winkel um den gemeinschaftlichen Gipfel aller Triangel F, das ist, vier rechte Winkel kommen. Folglich betragen alle Winkel der Figur mit vier rechten zusammen zwey Mahl so viele rechte, als die Figur Seiten hat.

2. Zusatz: (Fig. 11.). Alle äußere Winkel einer geradlinigen Figur zusammen sind vier rechten Winkeln gleich.

Der innere Winkel ABC macht mit dem äußern Winkel ABG, seinem Nebenwinkel, zwey rechte aus. Folglich betragen alle innere zusammen mit den äußern Winkeln doppelt so viele rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, das ist, nach dem vorigen Zusatze, so viel, als alle innere Winkel, wenn hiezu vier rechte Winkel kommen. Dem nach sind alle äußere, zusammen vier rechten Winkeln gleich.

Der 35. Satz.

Text: Lehrsatz: Parallelogramme auf einerley Grundlinie BC, und zwischen einerley Parallellinien, AF, BC, sind einander gleich.

Erster Fall. (Fig. 12.). Wenn der Parallelogramme ABCD, DBCF, Seiten AD, DF, welche der Grundlinie BC gegenüber sind, von einerley Punkte D begrenzt werden: so ist offenbar (34. S.) jedes Parallelogramm das Doppelte des Triangels BDC. Folglich sind die Parallelogramme gleich.

Zweyter Fall. (Fig. 13.). Der Parallelogramme ABCD, EBCF Seiten AD, EF, die der Grundlinie BC gegenüber liegen, sind nicht von einerley Punkte begrenzt.

Da ABCD ein Parallelogramm ist, so ist (34. S.) AD = BC. Aus demselben Grunde ist EF = BC.

Fol-

Folglich AD=EF. Wird daher DE entweder auf beyden Seiten hinzugesetzt oder weggenommen, so ist in beyden Fällen AE=DF. Nun ist auch AB=DC, und (29. S.) FDC=EAB, Folglich (4. S.) EB=FC, und △ EAB=△ FDC. Wird daher von dem Trapez ABCF zuerst der Triangel FDC, und dann der Triangel EAB weggenommen; so bleibt ABCD=EBCF übrig.

Note: Den Beweis dieses Satzes haben wir verändert, weil wir sonst nach der im Grundtexte befolgten Methode für drey besondere Fälle einen Beweis hätten geben müssen. Diese Fälle hat die nach dem Arabischen gemachte Uebersetzung. In Elementen dürfen niemahls solche Fälle ausgelassen werden, für welche ein Beweis nöthig ist. Daher haben wir denselben Weg gewählt, welchen, so weit es uns bekannt ist, zuerst Clairaut, in seinen Elementen der Geometrie, Seite 21, wies, den auch nachher Thomas Simpson, in seinen Elementen, Seite 32, betrat. Der Letzte gebraucht aber den 1, 26. S. des Euklides, aus welchem allein aber die Gleichheit der Triangel nicht unmittelbar folgt; man muß noch den 4. S. zu Hülfe nehmen. In dem ähnlichen Falle beym 34. S. sehen wir, daß es besser sey, nur den 4. S. anzuwenden.

Der 45. Satz.

Text: Zusatz: Aus dem Gesagten erhellet, wie an einer gegebenen geraden Linie ein, einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches, Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel entworfen werden könne; wenn man nähmlich an der gegebenen Linie ein dem ersten Triangel ABD gleiches Parallelogramm unter einem, dem gegebenen Winkel gleichen Winkel entwirft.

Dieser Zusatz ist aus dem Commendini von uns mitgetheilt worden, weil er oft anzuwenden ist.

Note:

Note: In dem Beweise, gegen das Ende, sagen wir schlechthin: Nun sind KM, FL parallel; statt daß im Griechischen dieses unnöthiger Weise erst aus dem 33. S. geschlossen wird. Denn KH ist nach der Construction der FG parallel; und vorher war dargethan, daß KHM, FGL gerade Linien sind.

Der 46. Satz.

Text: Zusatz: Daher ist jedes Parallelogramm, das Einen rechten Winkel hat, rechtwinklig.

Zweytes Buch.

Der 5. Satz.

* Zusatz. Aus diesem Satze erhellet, daß der Unterschied der Quadrate zweyer ungleichen Linien CB, CD, dem unter ihrer Summe AD und Differenz DB enthaltenen Rectangel gleich sey.

Der 13. Satz.

Text: Erster Fall. Wie im Grundtexte.

Zweyter Fall. (Fig. 14.) Der Perpendikel AD falle außerhalb des △ ABC.

Da bey D ein rechter Winkel, so ist (1, 16. S.) ACB > R. Folglich ist (2, 12. S.) □ AB = □ AC + □ CB + 2 (BC × CD); folglich, wenn □ BC beyderseits hinzukommt, □ BA + □ BC = □ AC + 2 □ BC + 2 (BC × CD). Nun ist BD beliebig im Punkte C geschnitten, also (2, 3. S.) DB × BC = (BC × CD) + □ BC, also auch 2 (DB × BC) = 2 □ BC + 2 (BC × CD). Daher ist □ AB + □ BC = □ AC + 2 (DB × BC). Folglich □ AC < □ AB + □ BC, und zwar um 2 (DB × BC).

Dritter Fall. (Fig. 15.) Die Seite AC des △ ABC sey der Perpendikel; so liegt BC zwischen dem

Perpendikel AC und dem spitzen Winkel B. Folglich ist (I, 47. S.) □AB + □BC = □AC + 2□BC; das ist, □AC < □AB + □BC um 2 (BD × BC.)

Note: Der Griechische Text beweiset diesen Satz bloß für spitzwinklige Triangel, ob er gleich von jedem Triangel wahr ist. Daher sind die Beweise für die übrigen Fälle mitgetheilt worden. Commandini und Clavius haben die Ihrigen auch gegeben.

Der 14. Satz.

Text: Beschreibe ein der gegebenen Figur A gleiches Rectangel BCDE. Sind nun BE, ED gleich; so ist das Verlangte geleistet, und BD ein der A gleiches Quadrat. Sind sie ungleich; so verlängere BE bis F, u. s. w.

Note: Hier sind in den Grundtext von Jemand aus Unkunde die Worte eingeschoben: „Sind aber BE, ED ungleich, so sey eine von beyden größer. Diese sey BE, und werde bis F verlängert." Als wenn darauf etwas ankäme, ob die größere oder die kleinere von beyden verlängert würde. Deßhalb haben wir bloß gesagt: Sind sie ungleich; so verlängere BE bis F.

Drittes Buch.

Erklärungen.

1. Text: Dieß ist keine Erklärung, sondern ein Lehrsatz, dessen Wahrheit einleuchtet. Denn werden Kreise, deren Halbmesser gleich sind, so auf einander gelegt, daß ihre Mittelpunkte zusammenfallen: so müssen die Kreise einander decken.

7. Text: "Der Winkel des Abschnitts ist, welcher von einer geraden Linie und dem Umkreise eingeschlossen wird."

Der 1. Satz.

Note: Einige, besonders neuere, Schriftsteller haben sich wider den apagogischen oder indirecten Beweis, ohne triftige Gründe dazu zu haben, viel zu heftig erklärt. Sie bedachten nicht, daß es Wahrheiten gebe, welche auf keine andere Art bewiesen werden können. Der vorliegende Satz gibt davon ein sehr deutliches Beyspiel. Ein directer Beweis läßt sich für ihn nicht geben. Denn außer der Erklärung vom Kreise findet sich im Vorhergehenden kein vom Kreise geltendes Princip, woraus ein directer oder indirecter Beweis abgeleitet werden könnte. Man muß daher mittelst gedachter Erklärung und vorher

bewiesener Sätze darthun, daß der durch die Construction gefundene Punkt des Kreises Mittelpunkt sey. Da man nun den Satz, alle Halbmesser des Kreises sind gleich, hier gebrauchen muß, und es nicht verstattet ist, anzunehmen, der durch die Construction gefundene Punkt sey der Mittelpunkt, weil dieses bewiesen werden soll: so erhellet, daß man irgend einen andern Punkt für den Mittelpunkt annehmen müsse. Folgt alsdann aus diesem Angenommenen etwas Ungereimtes, wie es denn auch nach Euklides Schlüssen daraus folgt, so ist es falsch, daß der angenommene Punkt der Mittelpunkt sey. Da sich dasselbe nun für jeden andern Punkt, außer dem durch die Construction gefundenen Punkte, ergibt: so kann kein anderer, als solcher, der Mittelpunkt seyn. So erhellet die Nothwendigkeit des indirecten Beweises, oder des Beweises aus dem Ungereimten.

Der 10. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 16.). Ein Kreis, ABC, schneidet einen andern, DEF, in nicht mehr als in zwey Punkten. Nähmlich der Umkreis des einen den Umkreis des andern.

Wenns möglich, so schneide der Kreis ABC den Kreis DEF in mehrern Punkten, nähmlich in B, G, F. Nimm des Kreises ABC Mittelpunkt K, und ziehe KB, KG, KF.

Da innerhalb des Kreises DEF ein Punkt K genommen ist, von welchem mehr als zwey gleiche gerade Linien, KB, KG, KF, an des Kreises Umfang gehen; so ist (3, 9. S.) K des Kreises DEF Mittelpunkt. Nun ist K auch des Kreises ABC Mittelpunkt. Folglich hätten Kreise, die einander schneiden, einerley Mittelpunkt; welches (3, 5. S.) unmöglich ist. Folglich schneidet ein Kreis einen andern in nicht mehr als in zwey Punkten.

Der 13. Satz.

Text: Lehrsatz: (Fig. 17.) Ein Kreis berührt einen andern, innerhalb sowohl als außerhalb, in nicht mehr, als in Einem Punkte.

Erster Theil. Wenn es möglich ist, so berühre der Kreis EBF den Kreis ABC innerhalb in mehr als einem Punkte, nähmlich in B, D. Ziehe BD; GH aber so (1, 10. 11. S.), daß sie die BD unter rechten Winkeln halbire.

Da die Punkte B, D in beyden Umkreisen sind, so fällt (3, 2. S.) BD ganz innerhalb beyder Kreise; folglich sind (3, 1. Zus.) beyder Kreise Mittelpunkte in der geraden Linie GH, von welcher BD unter rechten Winkeln halbirt wird; folglich (3, 11. S.) gehet GH verlängert durch der Kreise Berührungspunkte. Da aber die Punkte B, D, außerhalb der GH sind, so kann sie nicht durch solche Punkte gehen; welches dem Vorigen widerspricht. Folglich berührt ein Kreis einen andern innerhalb nur in einem Punkte.

Zweyter Theil. [Wie im Grundtexte.]

Note: Da man sich zweyer Kreise innere Berührung, in mehr als in Einem Punkte auf einerley Seite, leichter vorstellen kann, als auf entgegengesetzten Seiten, so konnte die Figur für diesen Fall nicht wohl ausgelassen werden. Die Construction im Grundtexte wäre dazu nicht so bequem gewesen, weil man die Mittelpunkte der Kreise nahe an ihren Umkreisen hätte nehmen müssen. Wir haben daher eine andere Construction und einen andern Beweis gegeben, nähmlich den zweyten Theil des von Campanus aus Arabischen Codices genommenen Beweises, den er, ohne Grund, in zwey Theile getheilt hatte.

Der 15. Satz.

Text: Lehrsatz; (Fig. 18.) In einem Kreise, ABCD, ist der Durchmesser, AD, die größte Linie; unter den übrigen aber ist jede dem Mittelpunkte nähere, BC, größer als die entferntere, FG; und jede größere BC, dem Mittelpunkte, E, näher, als die kleinere, FG.

Erster Theil. Fälle aus dem Mittelpunkte E auf BC, FG, die Perpendikel EH, EK, und ziehe EB, EC, EF.

Da AE = EB, ED = EC; so ist AD = BE + EC. Nun ist (1, 20. S.) BE + EC > BC; folglich AD > BC.

Da BC dem Mittelpunkte E näher, aber FG davon entfernter ist; so ist (3, 5. E.) EK > EH; folglich □EH < □EK. Nun ist BC = 2BH, FG = 2FK; auch ist □EH + □HB = □EK + □KF: folglich □HB > □KF; folglich HB > KF, und daher BC > GF.

Zweyter Theil. Es sey BC > FG; so ist BC dem Mittelpunkte E näher als FG, das ist, bey voriger Construction, EH < EK.

Denn, weil BC > FG; so ist auch BH > FK. Nun ist □BH + □HE = □FK + □KE; aber □BH > □FK; folglich □HE < □EK, mithin HE < EK.

Note: Im Grundtexte fehlt der umgekehrte Satz vom zweyten Theile dieses Theorems. Im vorhergehenden wird in ähnlichen Fällen jedes Mahl der umgekehrte Satz ausdrücklich angeführt und bewiesen. Deßhalb haben wir hier den umgekehrten Satz zugesetzt. Uebrigens wird, nach Commandini's Zeichnung, [Figur in der deutschen Uebersetzung] im Beweise des ersten Theils mittelst der Sehne MN gezeigt, daß der Durchmesser AD größer als BC sey. Dieß läßt sich aber unmittelbar darthun, ohne MN zu gebrauchen. Daher haben wir einen andern Beweis gegeben, welcher dem von Euklides für den

14. Satz geführten ähnlich ist. Gerade so führt Theodosius im 6. Satze 1. Buchs Sphæric. den Beweis für einen ganz ähnlichen Fall bey der Kugel.

[Theodosius Satz, auf welchen Simson hinweiset, ist folgender: Unter den Kreisen einer Kugel sind die durch den Mittelpunkt die größten; unter den übrigen sind die vom Mittelpunkte, auf entgegengesetzten Seiten, gleich weit entfernten gleich; die weiter entfernten hingegen kleiner.]

Der 16. Satz.

Text: Lehrsatz: Ein auf eines Kreises, ABC Durchmesser, AB, in dessen Endpunkte, A, errichteter Perpendikel fällt außerhalb des Kreises; zwischen solchen Perpendikel und den Umkreis fällt keine andere gerade Linie, oder, welches dasselbe sagt, der Umkreis gehet zwischen solchem Perpendikel und einer geraden Linie durch, welche mit dem Durchmesser einen beliebig großen, spitzen Winkel, oder, welche mit solchem Perpendikel einen beliebig kleinen Winkel einschließt.

[Der erste und zweyte Theil werden wie im Grundtexte bewiesen; die oben im Satze gegebene Erklärung wird hinter dem Beweise des zweyten Theils wiederhohlt, und dann noch hinzugesetzt:]

Dieses, und nichts anderes, muß man darunter verstehen, wenn es im Grundtexte und den Uebersetzungen heißt, der Winkel des Halbkreises sey größer, als jeder spitze, geradlinige Winkel.

Zusatz. Ueberdieß erhellet, daß nur Eine gerade Linie einen Kreis in einem und demselben Punkte berühren könne.

Note: Wir haben den wahren Sinn des Satzes angegeben, ohne dabey des Winkels des Halbkreises, oder des Winkels zu erwähnen, der nach Einiger Meynung

vom

vom Umkreise und der Berührungslinie eingeschlossen wird. Clavius, Peletarius, und andere neuere Geometer haben mit einander viel darüber gestritten und höchst paradoxe Behauptungen, die sich auf den Satz, wie wir ihn ausgedrückt haben, keinesweges gründen, aufgestellt. Gleichfalls haben wir den Sinn des folgenden 31. Satzes, ohne des Winkels des größern oder kleinern Abschnitts zu gedenken, ausgedrückt. Vieta, in seinen Oper. Mathem. Seite 386. behauptet mit Recht, daß man gedachte beyde Sätze mit gutem Grunde für verfälscht erklären könne.

Der 17. Satz.

Text: Aufgabe. Durch einen, entweder außerhalb eines Kreises, oder in dessen Umkreise, gegebenen Punkt eine Berührungslinie an den Kreis zu ziehen.

Erstlich. Wenn der gegebene Punkt A außerhalb des Kreises BCD ist. [Wie im Grundtexte.]

Zweytens. Wenn der gegebene Punkt D im Umkreise BCD liegt.

Ziehe von D nach dem Mittelpunkte E die gerade Linie DE, und errichte auf derselben im Punkte D den Perpendikel DF; so ist solcher die verlangte Berührungslinie.

Note: Wir haben noch die Auflösung für den Fall mitgetheilt, wo sich der gegebene Punkt, wodurch die Berührungslinie an den Kreis gezogen werden soll, im Umkreise befindet.

Der 20. Satz.

Text: Erstlich. Der Mittelpunkt E sey innerhalb des Winkels am Umkreise BAC.

Zweytens. Es breche sich die Linie BDC am Umkreise so, daß der Mittelpunkt E außerhalb des Winkels BDC sey.

Note:

Note: Die Worte des Grundtextes im Anfange des zweyten Theils des Beweises, κεκλασθω δὴ πάλιν, nähmlich BDC, übersetzen Brigg und Gregory unrichtig, rursus inclinetur, es neige sich wieder. Denn diese Worte müssen, nach Commandini, übersetzt werden, rursus inflectatur, es breche sich wieder.

Man sagt nähmlich von einer geraden Linie BDC, daß sie sich an einer andern, geraden oder krummen, Linie breche, wenn von einem Punkte B nach der letztern eine gerade Linie BD gehet, und vom Punkte D, wo sie einander treffen, wieder eine gerade Linie DC nach einem andern Punkte C gezogen wird, welche mit der ersten BD einen Winkel BDC einschließt. Dieses erhellet aus dem 90 Satze der Data. Denn auf die Art ist die ganze Linie zwischen dem ersten und letzten Punkte, B, C, im Begegnungs- oder Brechungspunkte D eingebogen oder gebrochen. In einem ähnlichen Sinne wird von zwey geraden Linien gesagt, daß sie von zwey Punkten aus an einem dritten gebrochen werden, wenn sie an diesem Punkte einen Winkel machen; wie man aus der Beschreibung der Ebenen Oerter des Apollonius in Pappus Vorrede zu seinem 7. Buche siehet. Wir haben hier diesen Sprachgebrauch nach dem 90 Satze der Data genauer erläutert.

[Der Satz in den Datis, auf welchen sich Simson beziehet, ist im Grundtexte folgender: Ἐὰν κύκλε δεδομένε τῇ θέσει ἐπὶ της περιφερείας δοθὲν σημεῖον ληφθῇ ἀπὸ δὲ τέτε προς την τε κυκλε περιφερειαν κλασθη τις ευθεια δεδομενην ποιεσα γωνιαν; δεδοται το ἑτερον περας της κλασθεισης.

Herr Schwab übersetzt: Wenn von irgend einem Punkte, A, Fig. 22. in dem Umfange eines der Lage nach gegebenen Kreises, ABC, zwey gerade Linien, AB, AC,

AC, gezogen werden, die dem Umfange (in B, C) begegnen, und einen gegebenen Winkel, BAC, einschließen; so wird, wenn der Punkt, B, worin die eine dem Umfange begegnet, gegeben ist, auch der Punkt, C, worin die andere demselben begegnet, gegeben seyn.

Siehe Euklid's Data, von Schwab. Stuttgart, 1780. Seite 154. Satz XCIII.

Die Stellen aus dem Pappus (Siehe des Apallonius von Pergen Ebene Oerter, von Camerer. Leipzig 1796. Seite 11 und 12.) sind wahrscheinlich folgende:

Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν etc. Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien an einen dritten Punkt hin gezogen werden, u. s. w.

Ἐὰν ἀπὸ ὁσωνῶν δεδομένων σημειῶν κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς σημείῳ etc. Wenn aus einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte an Einen Punkt hin gerade Linien gezogen werden, u. s. w.

Daher ließe sich der Ausdruck im obigen zweyten Theile des Beweises für den 20. Satz der Elemente wohl so geben:

Ferner seyen von den Punkten B, C, im Umfange nach einem dritten Punkte D desselben wieder zwey gerade Linien BD, CD so gezogen, daß der Mittelpunkt E außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Winkels BDC liege.]

Der 21. Satz.

Text: Nimm des Kreises ABCD Mittelpunkt F; und nun sey

Erstlich der Kreisabschnitt BAED größer als der Halbkreis. [Der Beweis wie im Grundtexte.]

Zwey-

Zweytens, (Fig. 19.) sey der Kreisabschnitt BAED nicht größer als der Halbkreis; so sind die Winkel in demselben BAD, BED, gleich.

Ziehe des Kreises Durchmesser AFC, und die CE, CD, CB; so ist der Kreisabschnitt BAEC größer als der Halbkreis, folglich BAC = BEC. Nun ist auch der Kreisabschnitt CBED größer als der Halbkreis; folglich CAD = CED. Folglich BAD = BED.

Note: Dieser Satz begreift zwey Fälle unter sich, wovon der zweyte, wo die Winkel in einem Kreisabschnitte sind, der kleiner als der Halbkreis ist, sich nicht im Grundtexte findet. Der Beweis, welchen wir für diesen Fall gegeben haben, ist, da er ohne Hülfstriangel bequem aus dem ersten Falle hergeleitet worden, einfacher, als der von Commandini.

[Commandini's Beweis findet man in Herren Lorenz Grundrisse, 1r Theil, Seite 185. §. 149. II, der Ausgabe von 1798.]

Der 23. Satz.

Text: Lehrsatz: (Fig. 20.) Auf einerley geraden Linie, AB, an einerley Seite derselben, können nicht zwey ähnliche und dabey nicht congruente Kreisabschnitte, ACB, ADB, errichtet werden.

Wenn's möglich ist, so seyen auf einerley geraden Linie AB, an einerley Seite derselben, zwey ähnliche, aber nicht congruente, Kreisabschnitte ACB, ADB, errichtet. Da also der Kreis ACB den Kreis ADB in den zwey Punkten A, B, schneidet, so (3, 10 S.) kann er ihn nicht in mehrern Punkten schneiden. Der eine Abschnitt ACB muß folglich innerhalb des andern ADB fallen. Ziehe die geraden Linien BCD, CA, DA. Da die Kreisabschnitte ähnlich sind; so ist (3, 11. E.) ACB = ADB; welches (1, 16. S.) unmöglich ist.

Der

Der 24. Satz.

Text: Denn legt man den Kreisabschnitt AEB so auf den Kreisabschnitt CFD, daß der Punkt A auf C, AB längs CD fällt: so muß, weil AB=CD angenommen worden, der Punkt B auf den Punkt D fallen. Folglich muß, wenn AB die CD deckt, (3, 23. S.) der Kreisabschnitt AEB den Kreisabschnitt CFD decken; folglich müssen sie (8. S.) einander gleich seyn.

Note zu beyden vorhergehenden Sätzen: Daß der Kreisabschnitt AEB den Kreisabschnitt CFD decken müsse, und nicht (Fig. 25.) die Lage von CGD haben könne, wo sich die Umkreise noch in einem dritten Punkte G schneiden würden, wird im 24. Satze des Grundtextes mittelst des 10. Satzes dieses Buches dargethan. Dieses mußte aber schon beym 23. Satze bewiesen werden, so wie auch, daß der eine Kreisabschnitt nicht innerhalb des andern fallen könne. Daher haben wir dieß aus dem 24. Satze ausgehoben, und wieder an die gehörige Stelle, in den 23. Satz, versetzt.

Der 25. Satz.

Text: Halbire AC in D, errichte auf AC in D den Perpendikel DB, und ziehe AB.

Erster Fall. Wenn die Winkel ABD, BAD gleich sind. [Wie der zweyte Fall im Grundtexte.]

Zweyter Fall. Wenn die Winkel ABD, BAD ungleich sind. [Figur zum ersten und dritten Falle in der deutschen Uebersetzung.]

Trage an den Punkt A der BA einen Winkel BAE =ABD, verlängere BD bis E und ziehe EC.

Da ABE=BAE, so ist BE=EA. Nun ist AD =DC, DE gemein, und bey D sind rechte Winkel; folglich (1, 4. S.) AE=EC. Aber es war AE=EB; daher BE=EC; folglich ist (3, 9. S.) E des Kreises

Mit-

Mittelpunkt. Zeichnet man demnach mit einer von den gleichen Linien, AE, EB, EC um E einen Kreis; so gehet solcher durch die übrigen Punkte, und ist der verlangte Kreis, dessen Segment das gegebene ABC ist.

Auch erhellet, daß, wenn ABD > BAD, der Mittelpunkt E außerhalb des Segments ABC falle, folglich ABC kleiner als der Halbkreis sey. Ist hingegen ABD < BAD; so fällt der Mittelpunkt E innerhalb des Segments ABC, welches in diesem Falle größer als der Halbkreis ist.

Note: Im Grundtexte werden drey Fälle in diesem Satze unterschieden, von denen aber zwey einerley Beweis und Construction haben; daher haben wir ihn bloß in zwey Fälle abgetheilt.

Der 31. Satz.

Text: Es erhellet, daß der Bogen AB außerhalb der geraden Linie AB falle, welche mit des Kreisabschnitts ADC Grundlinie AC einen rechten Winkel einschließt, der sich gegen den größern Abschnitt ABC öffnet, der Bogen AD hingegen innerhalb der AF liege, die mit derselben Grundlinie AC einen rechten Winkel macht, dessen Oeffnung gegen den kleinern Abschnitt ADC gerichtet ist.

* Oder: Der Bogen des größern Abschnitts ABC fällt außerhalb des rechten Winkels CAB, der Bogen des kleinern Segments ADC hingegen innerhalb des rechten Winkels CAF.

Nur dieses muß man bey der Behauptung des Grundtextes, daß der Winkel des größern Abschnitts größer, der Winkel des kleinern Segments hingegen kleiner, als ein rechter Winkel, sey, sich denken. [Vergleiche Note beym 16. S.]

Der 33. Satz.

Text: Erstlich. Der gegebene Winkel C sey = R. [Fig. beym 2 Falle, in der deutschen Uebersetzung.]

Halbire AB in F, und zeichne um F mit FA den Halbkreis AEB: so ist der Winkel AEB dem gegebenen C gleich.

Zweytens. Der gegebene Winkel C, sey nicht = R. [Fig. beym 1 und 3. Falle.]

An den Punkt A der gegebenen AB setze einen Winkel BAD = C; errichte auf AD in A den Perpendikel AE: halbire AB in F; errichte in F auf AB den Perpendikel FG, und ziehe GB.

Da AF = FB, FG gemein, AFG = BFG; so ist (1, 4. S.) AG = GB. Folglich wird der um G mit GA beschriebene Kreis AEB auch durch B gehen. Da DAE = R; so ist (3, 16. S.) AD eine Berührungslinie am Kreise AEB in A. Nun ist von A aus die gerade, den Kreis schneidende Linie AB gezogen: folglich ist DAB dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte AEB [oder AHB] gleich. Nun war DAB = C; folglich ist auch der Winkel im entgegengesetzten Abschnitte AEB [oder AHB] dem Winkel C gleich.

Daher ist über der gegebenen AB ein Kreissegment AEB [oder AHB] gezeichnet worden, welches einen, dem gegebenen Winkel C gleichen, Winkel fasset.

Note: Auch bey diesem Satze unterscheidet der Griechische Text drey Fälle. Allein für zwey davon, nähmlich für den, wenn der gegebene Winkel spitz, und für den, wenn solcher stumpf ist, sind Construction und Beweis einerley. Aus diesem Grunde haben wir den letzten Beweis als einen überflüssigen Beysatz eines ungeometrischen Abschreibers aus den Elementen weggeschafft. Uebrigens ist im Grundtexte der Beweis für den rechten Winkel viel zu weitläufig; wir haben ihn, mit Clavius, in einen kürzern abgeändert.

Der

Der 35. Satz.

Text: Erster Fall. Wenn die geraden, einander schneidenden Linien durch den Mittelpunkt gehen. [Wie im Grundtexte.]

Zweyter Fall. (Fig. 21.) Wenn die eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie BD die andere, so nicht durch den Mittelpunkt gehet, AC, unter rechten Winkeln in E schneidet.

Halbirt man BD in F, so ist (3, 1. S.) F des Kreises Mittelpunkt. Ziehe AF. Da BD die AB in E unter rechten Winkeln schneidet, so ist (3, 3. S.) AE = EC. Nun ist BD in F in gleiche, in E aber in ungleiche Abschnitte geschnitten; folglich (2, 5. S.) (BE × ED) + □ EF = □ FB = □ FA. Aber □ FA = □ EF + □ AE; folglich (BE × ED) + □ EF = □ EF + □ AE; folglich, wenn man □ EF beyderseits wegnimmt, BE × ED = □ AE, das ist, = AE × EC.

Dritter Fall. (Fig. 22.) Wenn die durch den Mittelpunkt gehende BD die andere AC, so nicht durch den Mittelpunkt gehet, im Punkte E unter schiefen Winkeln schneidet.

Halbirt man wieder BD, so ist der Halbirungspunkt F der Mittelpunkt. Ziehe AF, fälle (1, 12. S.) aus F auf AC den Perpendikel FG; so ist (3, 3. S.) AG = GC, und daher (2, 5. S.) (AE × EC) + □ EG = □ AG; folglich, wenn auf beyden Seiten □ GF hinzukommt, (AE × EC) + □ EG + □ GF = □ AG + □ GF. Nun ist □ EG + □ GF = □ EF, und □ AG + □ GF = □ AF; folglich (AE × EC) + □ EF = □ AF = □ FB. Aber (2, 5. S.) □ FB = (BE × ED) + □ EF; folglich (AE × EC) + □ EF = (BE × ED) + □ EF; daher ist, wenn auf beyden Seiten □ EF weggenommen wird, AE × EC = BE × ED.

Vierter Fall. (Fig. 23.) Wenn keine der beyden Linien AC, BD durch den Mittelpunkt geht.

Nimm

Nimm den Mittelpunkt F, und ziehe durch der Linien AC, BD, Durchschnittspunkt E den Durchmesser GEFH. Da (3. Fall.) $AE \times EC = GE \times EH$, und (2. Fall) $BE \times ED = GE \times EH$; so ist $AE \times EC = BE \times ED$.

Note: Bey dem 25. sowohl als bey dem 33. Satze wurden mehrere, bey dem 35. Satze hingegen wenigere Fälle, als nöthig waren, unterschieden. Es läßt sich nicht annehmen, daß Euklides die bey dem letzten Satze fehlenden Fälle, ihrer Leichtigkeit wegen, ausgelassen habe; denn er führt für den leichtesten Fall, wenn die sich schneidenden Linien beyde durch den Mittelpunkt laufen, einen Beweis, und im folgenden 36. Satze beweiset er jeden hierunter begriffenen Fall besonders, sowohl den, wenn die gerade Linie durch, als auch den, wenn sie nicht durch den Mittelpunkt gehet. Es scheint, als habe Theon, oder ein Anderer, im 35. Satze die übrigen Fälle, der Kürze wegen, aus dem Grundtexte entfernt. Man muß aber Fälle, die einen eigenen Beweis verlangen, nicht aus den Elementen weglassen; wie schon oben einmahl erinnert ist. Daher haben wir hier die übergangenen Fälle, welche sich auch in den Uebersetzungen aus dem Arabischen finden, hinzugesetzt.

Der 36. Satz.

Text: Zusatz. (Fig. 24.) Gehen daher von einem außerhalb eines Kreises befindlichen Punkte A gerade, den Kreis schneidende, Linien AB, AC, an denselben: so sind die unter den ganzen Linien und ihren außer dem Kreise liegenden Abschnitten enthaltenen Rectangel gleich, das ist $BA \times AE = CA \times AF$; weil solche Rectangel dem Quadrate der aus A an den Kreis gezogenen Berührungslinie AD, jedes für sich, gleich sind.

Der 37. Satz.

Note: Am Ende des Beweises haben wir die Worte „Eben so wird der Satz bewiesen, wenn der Mittelpunkt in AC ist" als einen Beysatz eines unkundigen Herausgebers weggelassen.

Das vierte Buch.

Note zu den Erklärungen: Befindet sich ein Punkt [einer geraden Linie, die Spitze eines Winkels] in einer geraden, oder in irgend einer andern Linie; so gebrauchen die Griechischen Geometer von ihm das Zeitwort ἅπτεσθαι, tangere, treffen; jener Punkt trifft diese Linie. [Eigentlich, jene gerade Linie, jener Winkel, trifft diese.] Dasselbe Wort gebrauchen sie, wenn eine gerade Linie, oder ein Kreis, einem Kreise begegnet; die gerade Linie, der Kreis, trifft den Kreis. Hingegen bedienen sie sich des Zeitworts ἐφάπτεσθαι, contingere, berühren, wenn eine gerade Linie, oder ein Kreis, einem Kreise zwar begegnet, aber ihn nicht schneidet. Von beyden Zeitwörtern schreiben sie nie das eine für das andere. Deßwegen muß man in der 5. Erklärung statt des Verbi simpl. ἅπτηται das compositum lesen ἐφάπτηται, contingit, berührt; und in der 1. 2. 3. 6. Erklärung, in Commandini's Version, muß es statt contingit heißen tangit, trifft. In der 2. und 3. Erklärung des 3. Buchs findet dieselbe Aenderung Statt; aber im Grundtexte, im 18. und 19. Satze des 3. Buchs muß, wo das Verb. simpl. stehet, das compositum gesetzt werden. [Denn im Hauptsatze stehet zwar schon das compositum, aber gleich nach dem Hauptsatze ist das simplex gebraucht.]

Der

Der 4. Satz.

[illegible] Daß der Kreis die geraden Linien AB, BC, [illegible] wird hier, wie auch in dem 8. und 13. S. [illegible], aus dem Ungereimten gezeigt; das Nähmlich aber im 17. 33. und 37. S. des 3. Buchs dieſen. Wir haben in den gedachten Sätzen des [illegible]n Buches einen kürzern, directen Beweis

[illegible]hmlich, hinter den Worten „berührt alſo jede Seite des Triangels" iſt in den Grundtext eingeſchoben: Denn, wenn er ſie ſchnitte; ſo fiele der auf dem Halbmeſſer, in deſſen Endpunkte, errichtete Perpendikel innerhalb des Kreiſes. Dafür hat Simſon in dem Texte geſagt: „Der gezeichnete Kreis berührt die geraden Linien AB, BC, CA, weil bey E, F, G, rechte Winkel ſind." Jene Worte ſind offenbar ein müßiger Zuſatz.]

Der 5. Satz.

Text: Halbire (1, 10. S.) AB, AC in den Punkten D, E, und errichte in dieſen Punkten auf AB, AC die Perpendikel DF, EF, welche verlängert zuſammentreffen müſſen. Denn träfen ſie nicht zuſammen, ſo wären ſie parallel; folglich auch AB, AC, die auf jenen perpendikular ſind, parallel; welches unmöglich iſt. Sie treffen alſo in einem Punkte F zuſammen. Ziehe BF, FC, FA.

Da AD = DB, DF gemein, und bey F rechte Winkel ſind; ſo iſt (1, 4. S.) AF = FB. Aus gleichen Gründen iſt CF = FA; folglich auch BF = FC. Da alſo vom Punkte F drey gleiche gerade Linien, FA, FB FC, auslaufen; ſo muß ein, mit einer derſelben um F

Das vierte Buch.

Note zu den Erklärungen: Befindet sich ein Punkt [einer geraden Linie, die Spitze eines Winkels] in einer geraden, oder in irgend einer andern Linie; so gebrauchen die Griechischen Geometer von ihm das Zeitwort ἅπτεσθαι, tangere, treffen; jener Punkt trifft diese Linie. [Eigentlich, jene gerade Linie, jener Winkel, trifft diese.] Dasselbe Wort gebrauchen sie, wenn eine gerade Linie, oder ein Kreis, einem Kreise begegnet; die gerade Linie, der Kreis, trifft den Kreis. Hingegen bedienen sie sich des Zeitworts ἐφάπτεσθαι, contingere, berühren, wenn eine gerade Linie, oder ein Kreis, einem Kreise zwar begegnet, aber ihn nicht schneidet. Von beyden Zeitwörtern schreiben sie nie das eine für das andere. Deßwegen muß man in der 5. Erklärung statt des Verbi simpl. ἅπτηται das compositum lesen ἐφάπτηται, contingit, berührt; und in der 1. 2. 3. 6. Erklärung, in Commandini's Version, muß es statt contingit heißen tangit, trifft. In der 2. und 3. Erklärung des 3. Buchs findet dieselbe Aenderung Statt; aber im Grundtexte, im 18. und 19. Satze des 3. Buchs muß, wo das Verb. simpl. stehet, das compositum gesetzt werden. [Denn im Hauptsatze stehet zwar schon das compositum, aber gleich nach dem Hauptsatze ist das simplex gebraucht.]

Der

Der 4. Satz.

Note: Daß der Kreis die geraden Linien AB, BC, CA berühre, wird hier, wie auch in dem 8. und 13. S. dieses Buchs, aus dem Ungereimten gezeigt; das Nähmliche wird aber im 17. 33. und 37. S. des 3. Buchs directe bewiesen. Wir haben in den gedachten Sätzen des vorliegenden Buches einen kürzern, directen Beweis gegeben.

[Nähmlich, hinter den Worten „berührt also jede Seite des Triangels" ist in den Grundtext eingeschoben: Denn, wenn er sie schnitte; so fiele der auf dem Halbmesser, in dessen Endpunkte, errichtete Perpendikel innerhalb des Kreises. Dafür hat Simson in dem Texte gesagt: „Der gezeichnete Kreis berührt die geraden Linien AB, BC, CA, weil bey E, F, G, rechte Winkel sind." Jene Worte sind offenbar ein müßiger Zusatz.]

Der 5. Satz.

Text: Halbire (1, 10. S.) AB, AC in den Punkten D, E, und errichte in diesen Punkten auf AB, AC die Perpendikel DF, EF, welche verlängert zusammentreffen müssen. Denn träfen sie nicht zusammen, so wären sie parallel; folglich auch AB, AC, die auf jenen perpendikular sind, parallel; welches unmöglich ist. Sie treffen also in einem Punkte F zusammen. Ziehe BF, FC, FA.

Da AD = DB, DF gemein, und bey F rechte Winkel sind; so ist (1, 4. S.) AF = FB. Aus gleichen Gründen ist CF = FA; folglich auch BF = FC. Da also vom Punkte F drey gleiche gerade Linien, FA, FB FC, auslaufen; so muß ein, mit einer derselben um F

gezeichneter, Kreis durch die Winkelspitzen des △ ABC gehen, folglich um denselben beschrieben seyn.

Zusatz. Es erhellet, daß, wenn der Mittelpunkt des Kreises in den Triangel fällt, jeder Winkel desselben kleiner als ein rechter Winkel seyn müsse, weil alsdann jeder im größern Kreisabschnitte ist. Fällt hingegen der Mittelpunkt auf eine Seite des Triangels, so wird der solcher Seite gegenüber liegende Winkel, da er im Halbkreise ist, ein rechter Winkel seyn. Fällt endlich der Mittelpunkt außerhalb des Triangels, an irgend eine Seite desselben, so wird der solcher Seite gegenüber liegende Winkel, weil er im kleinern Kreisabschnitte ist, größer als ein rechter Winkel seyn. Ist daher der gegebene Triangel spitzwinklig, so liegt des Kreises Mittelpunkt innerhalb desselben; ist der Triangel rechtwinklig, in der dem rechten Winkel gegenüber stehenden Seite; ist der Triangel stumpfwinklig, außerhalb desselben, über die dem stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite hinaus.

Note: Den Beweis dieses Satzes hat Jemand entstellt; denn es wird nicht gezeigt, daß die Perpendikel, von welchen des Triangels Seiten halbirt werden, zusammenlaufen. Ferner ist der Satz, ohne Beurtheilung, in drey Fälle abgetheilt, da doch, wie Campanus erinnert, einerley Construction und Beweis für alle drey gültig ist. Wir haben daher diese Wiederhohlungen vermieden. Auch ist offenbar der Zusatz im Grundtexte verderbt worden; denn es wird darin eines gegebenen Winkels erwähnt, wovon doch in dem Satze selbst weder die Rede ist, noch die Rede seyn kann.

[Simson beweiset die Convergenz der gedachten Perpendikel mittelst des Satzes, daß Perpendikel auf Parallellinien parallel sind, aus dem Ungereimten. Dieser Satz kommt jedoch im Vorigen nirgends vor. Und so fehlte sein Beweis wider die Methode.]

Der

Der 15. Satz.

Text: Zusatz. Hieraus erhellet, daß die Seite der sechsseitigen Figur dem Halbmesser gleich sey. Zieht man durch die Punkte A, B, C, D, E, F Berührungslinien an den Kreis, so wird dadurch um den Kreis eine gleichseitige und gleichwinklige Figur von sechs Seiten beschrieben, auf eine ähnliche Weise, wie es vorhin von der fünfseitigen Figur gezeigt wurde. Außer dem wird durch ein völlig ähnliches Verfahren in und um eine gegebene gleichseitige und gleichwinklige sechsseitige Figur ein Kreis beschrieben.

Note: Im Grundtexte fehlen am Ende dieses Zusatzes die Worte „gleichseitige und gleichwinklige."

[Simson hat im Anfange des Zusatzes übersehen, daß zwischen die Wörter, „sechsseitigen" — „Figur", noch eingeschaltet werden muß „in den Kreis beschriebenen, in den Kreis zu beschreibenden."]

Der 16. Satz.

Note: Im Beweise stehet „solcher Theile folglich, deren der Kreis ABCD funfzehn hat" ὅιων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε; es sollte aber statt ὁ κύκλος heißen ἡ περιφέρεια; solcher Theile folglich, deren der Umkreis ABCD funfzehn hat.

Das

Das fünfte Buch.

Erklärungen.

3. Text: „Verhältniß ist eine gewisse gegenseitige Beziehung zweyer gleichartigen Größen, in Rücksicht auf die Größe."

Note: Mehrere unter den Neuern haben diese Erklärung, als unrichtig, verworfen. Der gelehrte Isaac Barrow erläutert sie sehr umständlich am Ende seiner dritten Vorlesung, vom Jahre 1666, und widerlegt, so viel die Natur des Gegenstandes es verstattete, die dawider gerichteten Einwürfe. Am Ende trägt er seine Meynung darüber in diesen Worten vor:

„Ich setze nur noch hinzu, daß der Verfasser der „Elemente (vielleicht um seinen Gegenstand desto voll„ständiger zu erläutern, oder nur zu verschönern,) diese „metaphysische Erklärung den folgenden, weit genauern, „worin er die Begriffe von proportionirten Größen und „größerer Verhältniß festsetzt, in der Absicht voranschick„te, Anfängern einen allgemeinen Begriff von der Ver„hältniß zu geben. Gedachte Erklärung nenne ich eine „metaphysische; denn eigentlich ist sie nicht mathematisch, „weil in der Mathematik weder etwas aus ihr geschlossen „wird, noch auch, meiner Einsicht nach, etwas aus ihr „geschlossen werden kann. Eben so muß man die bald

„darauf

„darauf folgende Erklärung von der Proportion beur„theilen: Proportion ist Aehnlichkeit der Verhältnisse. „Auch diese empfiehlt sich dem Mathematiker nicht von „Seiten der Brauchbarkeit; sondern steht, wie es mir „scheint, bloß deßwegen hier, um Anfängern einen all„gemeinen, wenn gleich keinen faßlichen Begriff von Pro„portion zu geben. Auf den darauf folgenden, weit „schärfern, ächt mathematischen Erklärungen hingegen „beruht die ganze Lehre von den Verhältnissen, die „Seele der Mathematik. Diese Erklärungen verdienen „eine vorzügliche Aufmerksamkeit; sie verbreiten über „die Verhältnißlehre das hellste Licht: jene (3. und 8. E.) „und ihnen ähnliche aber können, ohne davon für die Wissen„schaft irgend einen erheblichen Nachtheil zu besorgen, „ausgelassen werden. So finden wir es im 7. Buche der „Elemente, wo die Proportion der Zahlen erklärt und „abgehandelt wird, ohne daß vorher von der Verhältniß „der Zahlen eine Erklärung gegeben worden, obgleich „solche Erklärung dort, wie hier, vielleicht eben so noth„wendig und nützlich gewesen wäre. Aber unumgänglich „erforderlich ist sie wirklich weder dort noch hier; wie„wohl von einer Sache, die eben wegen ihrer abstracten „Beschaffenheit so schwer zu begreifen und zu erklären ist, „sich kein bequemerer Begriff geben läßt, als derjenige, „welchen der Verfasser der Elemente gegeben hat. Aus „diesem Grunde achtete ich es für rathsam, ihn genau „zu erläutern, und ihn gegen die Einwürfe der Gegner „zu vertheidigen.“

Diesen Gedanken finden wir weiter nichts hinzuzusetzen, als daß wir, von der Nutzlosigkeit dieser und der folgenden 8. Erklärung aus jenen Gründen überzeugt, der festen Meynung sind, sie können nicht vom Euklides selbst, sondern müssen von einem ungeometrischen Herausgeber herrühren.

7. Text: Eine größere Verhältniß aber hat die erste zur zweyten, als die dritte zur vierten, oder,

eine

eine kleinere Verhältniß hat die dritte zur vierten, als die erste zur zweyten, wenn u. s. w.

8. Text: „Proportion ist die Gleichheit (Aehnlichkeit) der Verhältnisse."

11. Text: Wenn aber vier Größen stetig proportionirt sind, so ist die Verhältniß der ersten zur vierten, u. s. w.

Text: Erkl. A. Sind beliebig viele Größen von einerley Art vorhanden, so sagt man: Die erste habe zu der letzten eine aus den Verhältnissen der ersten zur zweyten, der zweyten zur dritten, der dritten zur vierten, und so stetig fort bis zur letzten, zusammengesetzte Verhältniß.

Zum Beyspiel, es seyen die Größen A, B, C, D; so sagt man: Die erste A habe zu der letzten D eine aus den Verhältnissen der A zur B, der B zur C, der C zur D, zusammengesetzte Verhältniß; oder, die Verhältniß A:D sey aus den Verhältnissen A:B, B:C, C:D zusammengesetzt.

Wenn nun die Verhältniß A:B der Verhältniß E:F, die B:C der G:H, und die C:D der K:L gleich ist; so sagt man: Die A habe zu der D eine aus denen Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß, welche den Verhältnissen E:F, G:H, K:L gleich sind. So muß man auch den kürzern Ausdruck verstehen: Die Verhältniß A:D sey aus den Verhältnissen E:F, G:H, K:L zusammengesetzt.

Auf ähnliche Art sagt man von einer Verhältniß M:N, wenn sie, bey den vorigen Verhältnissen, der A:D gleich ist, der Kürze wegen, sie sey der aus E:F, G:H, K:L zusammengesetzten gleich.

Note: In der 11 Erklärung muß vor dem Worte „proportionirt" noch das Wort „stetig" stehen. So wird sie im 33. S. des 11. B. angeführt.

Unmittelbar hinter dieser Erklärung muß, weil sie eigentlich hieher gehört, die Erklärung von der zusammengesetzten

gesetzten Verhältniß gegeben werden, von welcher die im Vorhergehenden und hier erklärten Zwiefachen, Dreyfachen, u. s. w. einer Verhältniß Arten sind. Theon warf sie unter die Erklärungen vor dem 6. Buche, wo er in der 5. eine unnütze und ungereimte Definition von der zusammengesetzten Verhältniß vorträgt. Die Erklärung, welche, ohne Zweifel, Euklides davon gegeben hat, haben wir zwischen die 11. und 12. eingeschaltet; denn er führt sie 6, 23. S. umständlich an. Clavius, Herigon, Barrow haben diese zwar auch mitgetheilt; behalten aber doch die des Theon bey, welche sie nicht in die Elemente hätten aufnehmen sollen.

12. Text: Anmerk. Mit den folgenden Wörtern bezeichnen die alten Geometer gewisse Arten, entweder die Ordnung oder die Größe der Proportionalgrößen zu verändern, wobey jedoch letztere proportionirt bleiben.

13. Text: Εναλλαξ, d. i. durch Verwechslung. Dieses Ausdrucks bedient man sich, wenn aus vier Proportionalgrößen geschlossen wird: Die erste verhalte sich zur dritten, wie die zweyte zur vierten; wie im 16. S. dieses Buchs gezeigt wird.

Note: Diese und die folgenden Erklärungen erhellen, mit weniger Ausnahme, deutlich aus den Sätzen dieses Buches, worin die Möglichkeit ihrer Aussagen dargethan wird. Sie scheinen von Theon oder einem Andern zugesetzt zu seyn. Wie dem auch sey; wir haben sie um der Anfänger Willen etwas deutlicher mitgetheilt.

14. Text: Αναπαλιν, durch Umkehrung; wenn man aus vier Proportionalgrößen schließt: Die zweyte zur ersten, so die vierte zur dritten. Siehe Satz B.

15. Text: Συνθεντι, durch Verbindung; wenn aus vier Proportionalgrößen geschlossen wird: Die erste und zweyte zusammen zur zweyten, so die dritte und vierte zusammen zur vierten. Siehe Satz 18.

16.

16. Text: Διελόντι, durch Trennung; wenn man aus vier Proportionalgrößen schließt: Wie der Ueberschuß der ersten über die zweyte zur zweyten, so der Ueberschuß der dritten über die vierte zur vierten. Siehe Satz 17.

17. Text: Ανασρέψαντι, durch Zurückkehrung; wenn man aus vier Proportionalgrößen den Schluß ziehet: Wie die erste zu ihrem Ueberschusse über die zweyte, so die dritte zu ihrem Ueberschusse über die vierte. Siehe Satz E.

18. Text: Δι᾽ ἴσου, aus dem Gleichen (aus gleichem Zwischenraume); wenn mehrere Größen mit eben so vielen andern, je zwey von jenen mit je zweyen von diesen, in einerley Verhältniß sind, und daraus geschlossen wird: Wie die erste zu der letzten von jenen, so die erste zu der letzten von diesen Größen. Folgende beyde Schlußarten sind dieser untergeordnet.

19. Text: Δι᾽ ἴσου, oder schlechthin aus dem Gleichen; wenn mehrere Größen mit eben so vielen andern so proportionirt sind, daß sich von jenen die erste zur zweyten, wie von diesen die erste zur zweyten, von jenen die zweyte zur dritten, wie von diesen die zweyte zur dritten, und so fort, verhält, und alsdann der in der 18. Erkl. erwähnte Schluß gemacht wird.

20. Text: Δι᾽ ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, aus dem Gleichen in zerstreuter oder ungeordneter Proportion; wenn mehrere Größen mit eben so vielen andern so proportionirt sind, daß von jenen sich die erste zur zweyten, wie von diesen die vorletzte zur letzten, von jenen die zweyte zur dritten, wie von diesen die nächstvorhergehende zur vorletzten, von jenen die dritte zur vierten, wie von diesen die dritte vor der letzten zur zweyten vor der letzten verhält, und so weiter, (indem man jene Größen nach der Ordnung, diese wider die Ordnung zählt) und alsdann der in der 18. Erkl. erwähnte Schluß daraus gezogen wird. Siehe Satz 23.

Text:

Text: Grundsätze.

I. Einerley oder gleicher Größen Gleichvielfache sind gleich.

II. Größen, deren Gleichvielfache gleich sind, sind gleich.

III. Das Vielfache des Größern ist größer, als das nähmliche Vielfache des Kleinern.

IV. Eine Größe, deren Vielfaches größer als das Gleichvielfache einer andern ist, ist größer als diese andere.

Der 2. Satz.

Text: Zusatz. (Fig. 25.) Wenn daher mehrere Größen AB, BG, GH, Vielfache von der C, und eben so viele andere DE, EK, KL, Gleichvielfache von der F, jede für sich, sind: so sind die ersten zusammen, das ist AH, von C, und die letzten zusammen, das ist DL, von F ein Gleichvielfaches.

Der 3. Satz.

Text: Nun ist aus eben den Gründen KF von B, und LH von D ein Gleichvielfaches, [hinter diesen Worten hat Simson noch:] und auf ähnliche Art, wenn in EF, GH mehrere der A, C, gleiche Theile wären.

Der 4. Satz.

Text: Nimm von E, F, beliebige Gleichvielfache K, L; und von G, H, andere beliebige Gleichvielfache M, N; u. s. w.

Zusatz. Hat die erste Größe zur zweyten dieselbe Verhältniß wie die dritte zur vierten; so haben auch, bey beliebiger Vervielfältigung, die Gleichvielfachen der ersten

und dritten zur zweyten und vierten dieselbe Verhältniß; ingleichen die erste und dritte zu Gleichvielfachen der zweyten und vierten einerley Verhältniß.

Denn es sey A:B=C:D; so ist, wenn man von der A, C, beliebige Gleichvielfache E, F, nimmt, E:B=F:D.

Man nehme von E, F, beliebige Gleichvielfache K, L, und von B, D, andere beliebige Gleichvielfache G, H: so läßt sich, wie im Vorigen, erweisen, daß K von A dasselbe Vielfache sey, welches L von C ist. Da A:B=C:D, auch von A, C gewisse Gleichvielfache K, L, und von B, D andere gewisse Gleichvielfache G, H gemacht sind; so ist, wenn K≷G, auch L≷H. Nun sind K, L von E, F beliebige Gleichvielfache, G, H von B, D, andere beliebige Gleichvielfache: folglich E:B=F:D.

Auf ähnliche Art beweiset man den andern Fall. [Nähmlich, daß, wenn A:B=C:D ist, und man von B, D, beliebige Gleichvielfache M, N, nimmt, A:M=C:N sey.]

Note zum Beweise. In der dem Beweise vorangehenden Construction fehlen im Grundtexte und der Lateinischen Version die Worte ἃ ἔτυχε zwey Mahl; wir haben diesen nothwendigen Ausdruck zugesetzt.

Der Beweis hat im Griechischen Texte, in Commandini's Lateinischer, und in der von Heinrich Brigg zu London 1620 zugleich mit dem Grundtexte der ersten 6 Bücher herausgegebenen Uebersetzung, welcher David Gregory in seiner Ausgabe von Euklid's Werken in dieser Stelle folgt, hinter den Worten, „Nun ist A:B=C:D" Folgendes: Aber von A, C sind die Gleichvielfachen K, L, und von B, D andere (ἃ ἔτυχε) beliebige Gleichvielfache, M, N, genommen. Dieß ist unrichtig; das Wort „beliebige" kann hier nicht stehen. Auffallend ist es, daß weder Brigg, der doch mit Recht dieses Wort in einer Stelle des 13. Satzes dieses Buchs,

nach

nach Gregory, der statt desselben Ausdrucks „gewisse" setzt, und ihn sogar in vier Stellen des erwähnten 13. Satzes ausläßt, es nicht in der vorliegenden und in der zweyten von denen Stellen, worin es im 17. Satze vorkommt, weggelassen hat, wo es doch, ohne der Wahrheit etwas zu vergeben, nicht geduldet werden kann. In keiner von diesen Stellen haben die Herausgeber des Griechischen Textes den Ausdruck ἄ ἔτυχε durchgestrichen, was sie hätten thun sollen.

Die nähmlichen Worte kommen in vier Stellen des 11. Satzes dieses Buches vor. In der ersten und letzten müssen sie stehen, hingegen in der zweyten und dritten sind sie, wenn gleich wahr, ganz überflüssig, so wie in der zweyten Stelle im 12, und in ähnlichen Stellen im 22. und 23., dieses Buches; sie fehlen aber in der letzten Stelle im 23 wie auch im 25. Satze des 11. Buches.

Note zum Zusatze: Dieser Zusatz [siehe die deutsche Uebersetzung] rührt von einem Unkundigen her, welcher ihn statt des ächten Beweises gab, den Theon oder irgend ein anderer Herausgeber, nicht von diesem, sondern von seiner rechtmäßigen Stelle, die er in diesem Buche hatte, wegnahm. Der Verfasser dieses Zusatzes wollte beweisen, daß vier Proportionalgrößen E, G, F, H auch umgekehrt proportionirt wären, oder daß G:E = H:F wäre. Nun ist dieß freylich wahr, hängt aber nicht von diesem Satze oder von dessen Beweise ab. Denn, wenn es heißt: Weil also bewiesen ist, daß, wenn K ≷ M, auch L ≷ N sey, u. s. w. so ist dieß zwar im Beweise des Satzes dargethan, nur nicht dadurch, daß E:G = F:H, denn dieß ist der Schlußsatz. Daher ist das „weil also bewiesen worden, u. s. w." ein ganz falscher Schluß. Denn, daß, wenn K ≷ M, auch L ≷ N sey, hätte aus der Voraussetzung E:G = F:H, und aus der 5. Erkl. dieses Buchs bewiesen werden müssen; und dieß ist nicht geleistet. Wir verweisen deßhalb auf Satz B, den wir, statt dieses Zusatzes, gehörigen

Ortes

Ortes mitgetheilt haben. Dafür stehet hier ein anderer Zusatz, der zum Beweise des 18. Satzes nöthig, auch sonst noch brauchbar ist, und dessen Gründe in dem Beweise des gegenwärtigen Satzes liegen.

Der 5. Satz.

Text: (Fig. 26.) Mache von FD dasselbe Vielfache AG, das von CF die AE ist: so ist (5, 1. G.) AE von CF, und EG von CD, ein Gleichvielfaches. Nun war angenommen, daß AE von CF, AB von CD, ein Gleichvielfaches sey; folglich sind EG, AB Gleichvielfache von CD; folglich (5, 1. G.) EG = AB. Nimmt man also auf beyden Seiten AE weg; so ist AG = EB. Folglich ist, weil AE von CF, und AG von FD, ein Gleichvielfaches, auch AG = EB ist, ebenfalls AE von CF, und EB von FD ein Gleichvielfaches. Nun ist nach dem Angenommenen AE von CF, und AB von CD ein Gleichvielfaches; folglich ist EB von FD dasselbe Vielfache, das AB von CD ist.

Note: Im Grundtexte und in den davon vorhandenen Lateinischen Versionen wird in der dem Beweise dieses Satzes vorangehenden Construction verlangt, [Fig. d. deutschen Uebers.] daß EB von CG dasselbe Vielfache werde, welches AE von CF ist; das heißt, es wird verlangt, man solle EB in so viele gleiche Theile schneiden, als in AE der CF gleiche Theile sind. Daraus aber ergibt sich offenbar, daß diese Construction nicht von Euklides herrühre. Euklid lehrt nicht eher, gerade Linien, geschweige andere Größen, in gleiche Theile zerlegen, als bis er zum 9. Satze des 6. Buches kommt. Er verlangt niemahls, in einer Construction etwas zu machen, wovon er vorher nicht zeigte, wie es gemacht werde, oder was er vorher nicht als eine Forderung annahm. Daher haben wir gedachte Construction in diejenige umgeändert, welche, ohne Zweifel, Euklides gegeben hatte, und in welcher

welcher weiter nichts verlangt wird, als daß die Größe etliche Mahle zu sich selbst hinzugethan werde. Diese Construction findet sich auch in den Uebersetzungen aus dem Arabischen, obwohl darin Satz und Beweis arg genug verfälscht sind. Jacob Peletar, der, so viel ich weiß, diesen Fehler zuerst bemerkte, gab in seinem Euklid, neben der richtigen Construction, auch die fehlerhafte, die er, wie er sich darüber äußert, deßhalb nicht habe auslassen wollen, weil sie scharfsinnig sey, und den Verstand in Erfindung ähnlicher Constructionen übe. Die Beweise unterscheiden sich bloß in der Construction; die im Grundtexte rühret von einem ungeometrischen Bearbeiter desselben her. Clavius hat sowohl die gewöhnliche, als auch die richtige Construction aufgenommen; führt aber so wenig, wie Peletar, den Grund an, warum die eine der andern vorgezogen werden müsse.

Der 6. Satz.

Text: Zweyter Fall. Es sey GB ein Vielfaches von E; so ist HD dasselbe Vielfache von F.

Mache von F das nähmliche Vielfache CK, welches GB von E ist. Da AG von E, CH von F, ein Gleichvielfaches, aber GB von E, CK von F, auch ein Gleichvielfaches ist; so ist (5, 2. S.) AB von E, KH von F, ein Gleichvielfaches. Nun war angenommen, AB sey von E, CD von F, ein Gleichvielfaches; folglich sind KH, CD Gleichvielfache von F, und daher (5, I. S.) KH = CD. Folglich ist, nach Wegnahme der CH, auch KC = HD. Aber GB ist von E dasselbe Vielfache, das KC von F, und KC war = HD; folglich ist HD von F dasselbe Vielfache, welches GB von E ist.

Note: Dieser Satz begreifet zwey Fälle unter sich; bloß für den einfachern, den ersten, führt der Grundtext den Beweis. Wahrscheinlich meynte Theon, es könnte bey der Ueberlieferung dieses ersten Falles sein Bewenden haben

haben; da in seiner verstümmelten Ausgabe des 5. Buches keiner von beyden Fällen gebraucht wird. Mit demselben Rechte hätte er auch den andern Fall sammt dem 5. Satze auslassen können. Wir haben den Beweis des zweyten Falles gegeben; weil sie beyde, wie der 5. Satz, zum Beweise des 18. Satzes dieses Buches nöthig sind. Die aus dem Arabischen veranstalteten Uebersetzungen liefern ebenfalls beyde Fälle kürzlich.

Der A. Satz. Lehrsatz.

[Text nach dem 6. Satze.]

Wenn von vier Größen, A, B, C, D, die erste zu der zweyten dieselbe Verhältniß hat, wie die dritte zu der vierten; die erste aber entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner als die zweyte ist: so ist auch die dritte entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner als die vierte.

Nimm von jeder beliebige Gleichvielfache, zum Beyspiel das Zwiefache; so ist, (5, 5. E.) wenn $2A > 2B$, auch $2C > 2D$. Ist nun $A > B$, so ist $2A > 2B$; folglich $2C > 2D$; folglich $C > D$. Ist daher die erste größer als die zweyte; so ist auch die dritte größer als die vierte. Auf ähnliche Art beweiset man, daß $C = D$, oder $C < D$ sey, wenn $A = B$, oder $A < B$ ist.

Note: Von diesem Satze machen die Geometer häufigen Gebrauch; so wird er 5, 25. S., 6, 31. S., 11, 34. S., und 12, 15. S. angewandt. Theon scheint ihn aus den Elementen verwiesen zu haben, weil er ihm und Andern hinlänglich einleuchtete, welche die von Unkundigen allgemein aufgenommene, aber verworrene und dunkle Vorstellung von Proportionalgrößen statt derjenigen richtigen setzten, die 5, 5. E. enthält. Wenn man findet, daß auch der 7. und 9. Satz dieses Buches, welche völlig so einleuchtend und leicht, wie dieser, sind, erwie-

erwiesen werden; so kann man nicht zweifeln, Eudoxus oder Euklides werden auch ihm eine Stelle in den Elementen angewiesen haben.

Von diesem Satze nimmt Alphons Borelli Veranlassung, die 5. Erkl. des 5. B. äußerst streng, aber auch höchst unbillig zu tadeln. Folgendes sind seine eigene Worte, Seite 126. seines zu Pisa 1658 erschienenen Wiederhergestellten Euklides: „Aus der Eigenschaft, welche die 5. Erklärung aussagt, läßt sich nicht im Geringsten der Satz mit Gewißheit erkennen, daß, wenn von vier Proportionalgrößen die erste die zweyte übertrifft, auch nothwendig die dritte die vierte übertreffen müsse; wie Clavius beym 16. S. des 5. B. gestehet." Nun gestehet zwar Clavius das nicht ausdrücklich, gibt aber doch Borelli Veranlassung, es von ihm zu sagen. In der von Borelli angeführten Stelle tadelt nähmlich Clavius den Commandini mit Recht, daß er diesen Satz mittelst des 16. S. 5. B. darthue, gibt aber selbst keinen Beweis dafür, sondern sagt am Ende 5, 14. 16. S. seiner Ausgabe, er erhelle aus der Natur der Proportion, und darinn folgt ihm Peter Herigon im 1. Schol. beym 14. S. des 5. B.; als wenn man nicht erst durch Schlüsse aus 5, 5. E. die Natur der Proportionalgrößen erkennen müßte. So leicht auch der Beweis unsers Satzes ist, so hat ihn doch, so viel mir bekannt ist, vor dem gelehrten Barrow Niemand gegeben. Er führt ihn, Seite 322. Lect. Mathem. wo er auf Borelli's Einwurf antwortet, aus der 5. Erkl. dieses Buches zwar indirecte, aber kurz und bündig. Jedoch läßt er sich aus der nähmlichen Erklärung eben so bequem directe führen; deßhalb haben wir ihm seine Stelle hinter den Sätzen von den Gleichvielfachen angewiesen.

Der B. Satz. Lehrsatz.

[Text nach dem 6. Satze. Vergl. 14. E.]

Sind vier Größen, (Fig. 27.) A, B, C, D, proportionirt: so sind sie auch umgekehrt proportionirt.

Nimm von B, D, gewisse Gleichvielfache E, F; von A, C andere beliebige Gleichvielfache G, H. Nun sey erstlich $E > G$, also $G < E$. Da $A:B = C:D$, von A, C aber die Gleichvielfachen G, H, von B, D andere beliebige Gleichvielfache E, F genommen sind, auch $G < E$ ist; so ist (5, 5. E.) $H < F$, oder $F > H$. Ist demnach $E > G$, so ist auch $F > H$. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß, wenn $E = G$, auch $F = H$, und wenn $E < G$, auch $F < H$ seyn müsse. Nun waren E, F von B, D beliebige Gleichvielfache, und G, H von A, C andere beliebige Gleichvielfache; folglich ist (5, 5. E.) $B:A = D:C$.

Note: Auch dieser Satz folgt leicht aus der 5. Erklärung, weßhalb ihm eine Stelle gleich hinter dem vorigen gebührt. Sehr unschicklich hatte man ihn, im Grundtexte, als Zusatz zum 4. Satze aufgeführt. Siehe die Note zu dem erwähnten Zusatze.

Der C. Satz. Lehrsatz.

[Text hinter dem 6. Satze.]

Wenn von vier Größen A, B, C, D, die erste A von der zweyten B dasselbe Vielfache oder derselbe Theil ist, wie die dritte C von der vierten D: so verhält sich die erste A zu der zweyten B, wie die dritte C zu der vierten D.

Erster Fall. (Fig. 28.) Es sey A von B, C von D einerley Vielfaches; so ist $A:B = C:D$.

Nimm von A und C gewisse Gleichvielfache E, F, auch von B, D andere beliebige Gleichvielfache G, H. Da nach der Voraussetzung A von B dasselbe Vielfache, welches

welches C von D, aber E von A, F von C einerley Vielfaches ist: so ist (5, 3. S.) auch E von B, und F von D, ein Gleichvielfaches. Nun sind G, H von B, D Gleichvielfache; folglich ist, wenn E ein größeres Vielfaches von B als G von B, auch F von D ein größeres Vielfaches als H von D; das heißt, wenn $E > G$, so ist auch $F > H$. Auf ähnliche Art läßt sich darthun, daß, wenn $E = G$, auch $F = H$, und wenn $E < G$, ebenfalls $F < H$ seyn müsse. Aber E, F sind von A, C beliebige Gleichvielfache; und G, H von B, D andere beliebige Gleichvielfache; folglich (5, 5. E.) $A : B = C : D$.

Zweyter Fall. (Fig. 29.) Es sey A von B derselbe Theil, der C von D ist: so ist $A : B = C : D$.

Denn alsdann ist B von A dasselbe Vielfache, das D von C ist; folglich ist nach dem ersten Falle $B : A = D : C$; folglich (5, B. S.) durch Umkehrung $A : B = C : D$.

Note: Auch von diesem Satze machen die Geometer häufigen Gebrauch. Nöthig ist er bey dem 5. und 6. Satze des 10. Buches. Clavius beweist ihn nur von Zahlen, in seinen Noten hinter des 8. E. des 5. B., mittelst einiger Sätze des 7. B. Er hatte dabey die Absicht, durch die vor dem 7. Buche gegebenen Erklärungen von proportionirten Zahlen zu zeigen, in wie fern 5, 5. E. auch auf Zahlen anwendbar sey. Die meisten Commentatoren finden es schwer, für die Behauptung, daß vier nach 7, 30. E. proportionirte Größen auch nach 5, 5. E. proportionirt seyen, einen Beweis zu führen. Doch läßt sich dieß leicht darthun, wie das Folgende zeigt.

Erstlich. Es seyen A, B, C, D vier Größen, und die erste A von der zweyten B entweder dasselbe Vielfache, oder derselbe Theil, wie die dritte C von der vierten D: so ist $A : B = C : D$.

Wird im Satze C bewiesen.

Zweytens. (Fig. 30.) Es seyen vier Größen AB, CD, FE, GH; und nun sey die erste AB von der zweyten

CD, die dritte EF von der vierten GH, einerley Bruch: so ist auch in diesem Falle AB : CD = EF : GH.

Es sey CK von CD, GL von GH einerley Theil, und AB von CK, EF von GL dasselbe Vielfache; so ist (5, C. S.) AB : CK = EF : GL. Nun sind CD, GH von CK, GL einerley Vielfache; folglich ist (5, 4. Zus.) AB : CD = EF : GH.

* Und wenn vier Größen nach 5, 5. E. proportionirt sind; so sind sie es auch nach 7, 20. E.

Erstlich. Wenn A : B = C : D, und A von B entweder ein Vielfaches oder ein Theil ist; so ist (siehe den folgenden Satz D) auch C von D dasselbe Vielfache oder derselbe Theil.

Zweytens. (Fig. 30.) Wenn AB : CD = EF : GH, und AB von CD ein Bruch ist, so ist EF von GH derselbe Bruch.

Es sey CK ein Theil von CD, und GL derselbe Theil von GH; auch sey AB ein Vielfaches von CK; so ist EF das nähmliche Vielfache von GL. Nimm von GL dasselbe Vielfache M, das AB von CK ist; so ist (5, C. S.) AB : CK = M : GL. Nun sind CD, GH Gleichvielfache von CK, GL; daher ist (5, 4. Zus.) AB : CD = M : GH. Aber angenommen war AB : CD = EF : GH; folglich (5, 9. S.) M = EF. Folglich ist EF dasselbe Vielfache von GL, welches AB von CK ist; das ist, EF ist von GH derselbe Bruch, der AB von CD ist.

Der D. Satz. Lehrsatz.

[Text hinter dem 6. Satze.]

Wenn von vier Proportionalgrößen (Fig. 31.) A, B, C, D, die erste A von der zweyten B entweder ein Vielfaches, oder ein Theil ist: so ist auch die dritte C dasselbe Vielfache, oder derselbe Theil von der vierten D.

Erster Fall. Es sey A : B = C : D, und A ein Vielfaches von B.

Erster

Nimm E=A, und von D dasselbe Vielfache F, welches von B die A oder die E ist.

Da A:B=C:D, und von der zweyten B, der vierten D die E, F Gleichvielfache sind: so ist (5, 4. Zus.) A:E=C:F. Nun ist A=E; folglich (5, A. S.) C=F. Nun ist aber F von D, und E oder A von B einerley Vielfaches; folglich ist C von D das nähmliche Vielfache, welches A von B ist.

Zweyter Fall. Es sey A:B=C:D, und A ein Theil von B.

Da A:B=C:D, so ist (5, B. S.) durch Umkehrung B:A=D:C. Nun ist A ein Theil der B, das ist, B ein Vielfaches der A; folglich ist, nach dem vorigen Falle, D dasselbe Vielfache der C, das heißt, C von D derselbe Theil, der A von B ist.

Note: Dieser Satz wird ebenfalls oft in Beweisen anderer Sätze gebraucht. Nöthig ist er bey 6, 9. S. Theon scheint ihn, aus dem in der Note zum Satze A erwähnten Grunde, ausgelassen zu haben.

Der 8. Satz.

Text: Es seyen AB, BC, zwey ungleiche Größen, und darunter AB die größere; auch sey D eine andere, beliebige Größe: so wird behauptet, die AB habe zu der D eine größere Verhältniß als die BC zu der D, und D zu der BC eine größere Verhältniß, als zu der AB.

Wenn von den beyden AC, CB diejenige Größe, welche von ihnen nicht die größere ist, nicht kleiner als D ist; so nimm (Fig. 32[a].) von AC, CB die Zwiefachen EF, FG. Wenn hingegen diejenige, welche von den beyden AC, CB nicht die größere ist, kleiner als D ist; (Fig. 32[b] und 32[c]) so wird solche, es sey nun entweder AC oder CB, vervielfältigt irgend einmahl größer als D seyn. Vervielfältige sie, bis sie größer als D gewor-

worden; und eben so viele Mahle nimm auch die andere, so daß EF von AC, FG von CB dasselbe Vielfache sey. Folglich ist sowohl EF als auch FG größer als D. Nimm in jedem Falle von der D das Zwiefache H, das Dreyfache K, und so fort immer ein Mahl mehr, bis daß du auf ein Vielfaches der D kommst, das zuerst größer als FG sey. Solches Vielfache sey L, und K dasjenige Vielfache der D, welches zunächst kleiner als L ist.

Da also L von D dasjenige Vielfache ist, welches zuerst größer als FG; so ist K nicht größer als FG, also FG nicht kleiner als K. Und da EF von AC, FG von CB ein Gleichvielfaches ist; so sind (5, 1. S.) FG, EG von CB, AB Gleichvielfache. Nun war gezeigt worden, daß FG nicht kleiner als K, und nach der Construction ist $EF > D$; folglich die ganze $EG > K + D$. Aber $K + D = L$; folglich $EG > L$. Nun ist FG nicht $> L$, und EG, FG sind von AB, BC Gleichvielfache, auch L von D ein anderes beliebiges Vielfache; folglich (5, 7. E.) hat AB zu D eine größere Verhältniß als BC zu D.

Ferner wird behauptet, die D habe zu der BC eine größere Verhältniß, als zu der AB.

Denn mit Beybehaltung voriger Construction läßt sich auf ähnliche Art zeigen, daß L die FG, aber nicht die EG, übertreffe. Nun ist L ein Vielfaches der D, FG aber und EG sind andere beliebige Vielfache der CB, AB. Folglich hat D zu der CB eine größere Verhältniß als zu der AB.

Note: Im Beweise dieses Satzes, wie er jetzt im Grundtexte dastehet, sind zwey Fälle. (Siehe den Beweis in Hervagius oder Gregory's Ausgabe). In dem ersten Falle (Fig. 32d.) ist $AE < EB$; und hier folgt nothwendig, daß HΘ, das Vielfache von EB, größer sey als ZH, das Gleichvielfache von AE. Aber dieses Vielfache der AE ist, der Construction nach, größer als Δ, daher denn HΘ größer als Δ seyn wird. Allein in dem zweyten Falle, worin nähmlich $EB < AE$ ist,

kann,

kann obwohl ZH > Δ, dennoch die HΘ < Δ seyn. Daher läßt sich von der Δ kein Vielfaches nehmen, das zuerst größer als K oder HΘ sey, weil die einfache Δ > K ist. Dieß nöthigte den Urheber dieses Beweises, einen Theil der Construction zu ändern. Er änderte aber auch ohne Noth, in diesem zweyten Falle, einen andern Theil der Construction, der im ersten angewandt war, wenn er nähmlich verlangte, man solle von Δ ein Vielfaches N nehmen, welches zuerst größer als ZH sey; denn er konnte von Δ ein Vielfaches nehmen, welches zuerst größer als HΘ oder K war, gerade wie im ersten Falle. Diese K gebraucht er, ziemlich ohne Beurtheilung, im Beweise beyder Fälle, welches zu weiter nichts dient, als daß es den Beweis weitläufiger macht. Noch gibt es einen dritten Fall, dessen im Beweise gar nicht gedacht wird, den nähmlich, wo AE im ersten, oder EB im zweyten größer als Δ ist. Alsdann muß man von AE und von EB Gleichvielfache, etwa die Zwiefachen, nehmen, wie es in unserer Ausgabe geschehen ist, in welcher alle Fälle zugleich erwiesen sind. Daraus erhellet nun wohl, daß Theon, oder ein anderer, ziemlich ungeometrischer Herausgeber, diesen Satz entstellt habe.

Der 9. Satz.

Text: Erstlich. (Fig. 33.) Es habe A sowohl als auch B zu der C einerley Verhältniß; so wird behauptet, daß A = B sey.

Denn wäre das nicht, so ist eine von ihnen größer. Es sey A die größere; so lassen sich, nach dem vorigen Beweise, von A, B, gewisse Gleichvielfache, und von C ein gewisses Vielfaches angeben, von denen zwar das Vielfache der A, aber nicht das Vielfache der B, das Vielfache der C übertrifft. Es seyen D, E von A, B Gleichvielfache, und F ein Vielfaches der C, so daß zwar D, aber nicht E, die F übertreffe. Da nun A : C = B :

C,

C, und D, E, von A, B, gewisse Gleichvielfache sind; F ein Vielfaches der C, und D > F ist: so ist (5, 5. E.) E > F. Nun war E nicht > F; welches einander widerspricht. Folglich muß, wenn A : C = B : C ist, auch A = B seyn.

Zweytens. Es habe die C zu der A und zu der B einerley Verhältniß; so wird behauptet, daß A = B sey.

Wäre dieß nicht, so sey A > B. Nun ist, wie im Vorigen gezeigt worden, F ein gewisses Vielfaches der C, und E, D, sind Gleichvielfache der B, A, in der Art, daß zwar F die E, nicht aber die D, übertrifft. Da C : B = C : A, und F, das Vielfache der ersten C, die E, das Vielfache der zweyten B, übertrifft; so wird auch (5, 5. E.) F, das Vielfache der dritten C, die D, das Vielfache der vierten A, übertreffen. Aber F übertraf die D nicht; welches einander widerspricht. Folglich muß, wenn C : B = C : A ist, A = B seyn.

Note: Wir haben den Beweis dieses Satzes deutlicher entwickelt, als es im Grundtexte geschehen ist.

Der 10. Satz.

Text: Erstlich. (Fig. 33.) Es habe A zu C eine größere Verhältniß, als B zu C; so wird behauptet, daß A > B sey.

Denn da A zu der C eine größere Verhältniß hat, als B zu der C; so lassen sich (5, 7. E.) von A, B gewisse Gleichvielfache D, E, und von C ein gewisses Vielfaches F, in der Art angeben, daß das Vielfache F der C zwar von dem Vielfachen D der A, aber nicht auch von dem Vielfachen E der B übertroffen werde. Folglich ist D > E; folglich ist, weil D, E von A, B Gleichvielfache sind, (5, IV. G.) A > B.

Zweytens. Es habe C zu der B eine größere Verhältniß als zu der A; so wird behauptet, daß B < A sey.

Denn

Denn es sind (5, 7. E.) F ein gewisses Vielfaches der C; und E, D gewisse Gleichvielfache der B, A, so daß F zwar die E, nicht aber auch die D übertrifft. Folglich ist E < D, und da E, D von B, A Gleichvielfache sind, so ist (5, IV. G.) B < A.

Note: Es war nöthig, für diesen Satz einen andern Beweis zu geben, da der in den Griechischen und Lateinischen Ausgaben nicht ächt und genau ist. Die Wörter Größer, Gleich, Kleiner werden in einem andern Sinne von Größen, in einem andern von Verhältnissen gebraucht, wie dieß aus 5, 5. 7. E. deutlich erhellet. Laßt uns also einmahl an diesen Erklärungen den Beweis des 10. Satzes prüfen. Er lautet: „Es habe A zu der C eine größere Verhältniß, „als B zu der C; so behaupte ich, daß A > B sey. Wäre „A nicht > B; so wäre entweder A = B, oder A < B. „Nun kann A nicht = B seyn, weil sonst A, B zu der „C dieselbe Verhältniß haben müßten. Sie haben aber „nicht dieselbe Verhältniß zu der C; folglich ist auch A „nicht = B." Das Beweisende dieser Schlußreihe liegt hierin: Wenn A : C = B : C ist, und man nimmt von A, B beliebige Gleichvielfache, auch von C ein gewisses Vielfaches: so wird, wenn das Vielfache von A größer als das Vielfache der C ist, auch Kraft 5, 5. E. das Vielfache der B größer als das Vielfache der C seyn. Aber da nach der Voraussetzung die A zu der C eine größere Verhältniß hat, als die B zu der C; so lassen sich Kraft 5, 7. E. von A, B, gewisse Gleichvielfache, und von C ein gewisses Vielfaches angeben, so daß zwar das Vielfache der A, aber nicht das Vielfache der B, größer als das Vielfache der C sey. Dieses aber widerspricht dem Vorhergehenden gerade zu. Folglich ist A nicht = B.

Jetzt fährt der Beweis so fort: „Allein eben so „wenig ist A < B. Die im entgegengesetzten Falle würde zu der C die A eine kleinere Verhältniß, als die B, „haben. Nun ist dieses nicht; folglich ist auch nicht A < B" u. s. w. Es heißt hier, die A würde zu der

C eine kleinere Verhältniß, als die B zu der C, haben; oder, welches daſſelbe iſt, die B würde zu der C eine größere Verhältniß, als die A zu der C, haben. Dieß heißt Kraft 5, 7. E., es werden ſich von A, B gewiſſe Gleichvielfache und von C ein gewiſſes Vielfaches ſo angeben laſſen, daß zwar das Vielfache der B, aber nicht auch das Vielfache der A, größer als das Vielfache der C ſey. Und da war zu beweiſen, daß dieß niemahls eintreten könne, wenn die Verhältniß der A zu der C größer als die Verhältniß der B zu der C iſt, folglich darzuthun, daß in dieſem Falle das Vielfache der A ſtets das Vielfache der C übertreffe, wenn das Vielfache der B daſſelbe übertrifft. Denn, ſobald dieß erwieſen iſt, ſo erhellet auch, daß die B zu der C keine größere Verhältniß, als die A zu der C, das iſt, A zu C keine kleinere Verhältniß, als B zu C, haben könne. Dieß aber iſt im Beweiſe des 10. Satzes gar nicht dargethan. Wäre der 10. Satz einmahl ſtreng erwieſen, ſo würde es unmittelbar aus ihm folgen; da es ſich ohne ihn nicht leicht erweiſen läßt, wie Jeder bey dem Verſuche finden wird. Daher iſt denn auch der Beweis des 10. Satzes nicht befriedigend. Derjenige, welcher den im Grundtexte vorhandenen Beweis des 10. Satzes, ſtatt des Beweiſes von Eudoxus oder Euklides, gab, ſcheint von dem Axiom, eine Größe kann nicht zugleich größer und kleiner als eine andere ſeyn, welches, von Größen ausgeſagt, völlig klar iſt, auf Verhältniß eine irrige Anwendung gemacht zu haben. Was Einem und demſelben gleich iſt, iſt ſelbſt gleich, iſt zwar, von Größen geſagt, ein höchſt evidentes Axiom; aber Euklides gebraucht es nicht, wenn er beweiſet, daß Einer und derſelben Verhältniß gleiche Verhältniſſe ſelbſt gleich ſind, ſondern thut dieſen Lehrſatz im 11. Satze ausführlich dar. Daß aber der Beweis, welchen wir in den Text geſetzt haben, mit Eudoxus oder Euklides Beweiſe ganz derſelbe ſey, läßt ſich kaum in Zweifel ziehen, da ſich die Concluſion des 10. Theorems kurz und gerade zu

aus

aus 5, 7. E., welche die größere Verhältniß angehet, herleiten läßt.

Der oben erwähnte Satz, nähmlich daß, wenn A zu C eine größere Verhältniß als B zu C hat, und von A, B, gewisse Gleichvielfache, von C ein gewisses Vielfaches, gemacht werden, alsdann aber das Vielfache der B größer als das Vielfache der C ist, auch das Vielfache der A größer als das Vielfache der C sey, wird so bewiesen.

Es seyen (Fig. 34.) D, E Gleichvielfache von A, B, und F ein Vielfaches von C, so daß E > F: so ist auch D > F.

Da A zu C eine größere Verhältniß, als B zu C, hat; so ist (5, 10. E.) A > B. Folglich ist D, das Vielfache der A, größer als E, dasselbe Vielfache der B. Nun ist E > F; folglich um so mehr D > F.

Der 13. Satz.

Text: Zusatz. Und wenn die erste zu der zweyten eine größere Verhältniß, als die dritte zu der vierten, die dritte aber zu der vierten dieselbe Verhältniß, wie die fünfte zur sechsten, hat: so läßt sich auf ähnliche Art beweisen, daß die erste zu der zweyten eine größere Verhältniß, als die fünfte zu der sechsten, habe.

Note: In Commandini's, Brigg's und Gregory's Uebersetzungen steht im Anfange des Beweises: „und das Vielfache der C übertrifft zwar das Vielfache „der D, aber das Vielfache der E übertrifft nicht das „Vielfache der F." Dieß ist wörtlich aus dem Griechischen übersetzt. Allein der Sinn fordert offenbar, daß es heiße: „so daß das Vielfache der C zwar das Viel„fache der D, aber nicht das Vielfache der E das Vielfache „der F übertreffe." So nach der richtigen Lesart verbessert fand sich auch diese Stelle in den ersten Ausgaben der Elemente nach der Version des Commandini, welche

zu

zu Oxford gedruckt wurden. In den spätern Ausgaben hingegen, wenigstens in der vom Jahre 1747, ist dieser Fehler des Grundtextes beybehalten worden.

Noch haben wir diesem Satze einen Zusatz gegeben, der bey dem 20. und 21. Satze brauchbar, und eben so nützlich, wie der Satz selbst, ist.

Der 14. Satz.

Text: Erstlich. [Wie in der deutschen Uebersetzung.]

Zweytens. (Fig. 35ª.) Es sey A=C; so ist auch B=D. Denn, da A:B=C, das ist A, :D; so ist (5, 9. S.) B=D.

Drittens. (Fig. 35ᵇ.) Es sey A<C; so ist auch B<D. Denn, da C>A, und C:D=A:B; so ist, nach dem ersten Falle, D>B, das ist B<D.

Note: Wir haben es für rathsam geachtet, auch die beyden Fälle, deren Beweise der Grundtext nicht hat, hinzuzufügen, da ihre Beweise mit dem Beweise des ersten Falles nicht übereinkommen.

Der 17. Satz.

Text: Nimm von AE, EB, CF, FD beliebige Gleichvielfache GH, HK, LM, MN; von EB, FD aber wieder noch andere beliebige Gleichvielfache KO, NP. Da GH von AE, HK von EB ein Gleichvielfaches ist; so ist auch (5, 1. S.) GH von AE, und GK von AB ein Gleichvielfaches. Nun ist GH von AE, LM von CF ein Gleichvielfaches; folglich ist GK von AB so vielfach, wie LM von CF. Ferner, da LM von CF, MN von FD ein Gleichvielfaches ist; so ist (5, 1. S.) LM von CF dasselbe Vielfache, das LN von CD ist. Nun war LM von CF, GK von AB ein Gleichvielfaches; folglich ist GK von AB so vielfach, wie LN von CD;

CD; also sind GK, LN von AB, CD Gleichvielfache. Wieder, da HK von EB, MN von FD ein Gleichvielfaches, aber auch KO von EB, NP von FD ein Gleichvielfaches ist: so ist (5, 2. G.) HO von EB so vielfach, wie MP von FD. Da AB : BE = CD : DF, und von AB, CD die Gleichvielfachen GK, LN, aber von EB, FD andere gewisse Gleichvielfache HO, MP genommen sind; so ist, (5, 5. G.) wenn GK ≷ HO, auch LN ≷ MP. Wenn aber GH > KO, so ist auch, wenn zu Beyden HK hinzukömmt, GK > HO; also LN > MP; also, nach Wegnahme der MN von Beyden, LM > NP. Folglich ist, wenn GH > KO, auch LM > NP. Eben so läßt sich beweisen, daß, wenn GH = KO, auch LM = NP, und wenn GH < KO, auch LM < NP seyn werde. Nun sind GH, LM von AE, CF beliebige Gleichvielfache, und KO, NP von EB, FD andere beliebige Gleichvielfache. Folglich AE : EB = CF : FD.

Note: Wir haben die Folge der Schlüsse in diesem Beweise, durch einige Veränderungen, natürlicher geordnet.

Der 18. Satz.

Text: Mache von AB, BE, CD, DF, beliebige Gleichvielfache GH, HK, LM, MN; von BE, DF aber wieder noch andere beliebige Gleichvielfache KO, NP. Da also KO, NP Gleichvielfache von BE, DF, und KH, NM von denselben Größen Gleichvielfache sind: so ist, wenn KO ≷ KH, auch NP ≷ NM.

Nun sey (Fig. 36.) erstlich KO nicht größer als KH, so wird auch NP nicht größer als NM seyn. Da GH, HK Gleichvielfache von AB, BE sind, und AB > BE ist; so ist (5, III. G.) GH > KH. Aber KO ist nicht > KH, folglich ist GH > KO. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß LM > NP sey. Folglich, wenn KO nicht > KH ist, so wird auch GH, das Vielfache

der AB, stets größer als KO, das Vielfache der BE, und zugleich LM, das Vielfache der CD, größer als NP, das Vielfache der DF, seyn.

Zweytens (Fig. 36b.) sey KO > KH; so wird auch, wie gezeigt worden, NP > NM seyn. Da die ganze GH von der ganzen AB dasselbe Vielfache ist, welches die von der GH weggenommene HK von der von AB weggenommenen BE ist; so ist (5, 5. S.) der Rest GK von dem Reste AE das nähmliche Vielfache, welches GH von AB, oder auch LM von CD ist. Auf gleiche Weise ist, weil LM von CD, die von LM weggenommene MN von der von CD weggenommenen DF, einerley Vielfaches ist, auch (5, 5. S) der Rest LN von dem Reste CF ein solches Vielfaches, wie die ganze LM von der ganzen CD. Nun waren LM von CD, GK von AE, Gleichvielfache; folglich sind GK von AE, LN von CF, Gleichvielfache. Da aber KO, NP, von BE, DF Gleichvielfache, und von jenen KH, NM auch Gleichvielfache der BE, DF weggenommen sind; so sind (5, 6. S.) die Reste HO, MP denen BE, DF entweder gleich, oder doch von ihnen Gleichvielfache.

Es sey also zuerst HO = BE, und MP = DF. Da AE : EB = CF : FD, und von AE, CF die Gleichvielfachen GK, LN genommen sind: so ist (5, 4. Zus.) GK : EB = LN : FD. Aber HO = BE; MP = DF; folglich GK : HO = LN : MP. Folglich ist (5, A. S.) wenn GK ≷ HO, auch LN ≷ MP.

Es seyen (Fig. 36c.) zweytens HO, MP Gleichvielfache der EB, FD. Da AE : EB = CF : FD, und von AE, CF die Gleichvielfachen GK, LN, aber von EB, FD andere beliebige Gleichvielfache HO, MP genommen sind; so ist (5, 5. E.), wenn GK ≷ HO, auch LN ≷ MP; welches gleichfalls im vorigen Falle dargethan war. Wenn daher GH > KO, und man nimmt auf beyden Seiten KH weg; so wird GK die HO, mithin auch LN die MP, und, wenn zu Beyden die NM hin-

hinzukommt, die LM die NP übertreffen. Also wird, übertrifft GH die KO, auch LM die NP übertreffen. Auf ähnliche Weise läßt sich darthun, daß, wenn GH = KO, oder GH < KO, ist, auch LM = NP, oder LM < NP sey. In dem Falle, worin KO nicht größer als KH ist, war bewiesen, daß GH stets größer als KO, und ebenfalls LM > NP sey. Nun sind GH, LM, von AB, CD beliebige Gleichvielfache, und KO, NP, von BE, DF andere beliebige Gleichvielfache; folglich ist (5, 5. E.) AB : BE = CD : DF.

Note: Der Beweis dieses Satzes ist auf keine Weise von Euklides; auch ist er unmethodisch. Denn es es wird darin vorausgesetzt, daß es zu drey gegebenen Größen, wovon wenigstens zwey gleichartig sind, eine vierte Proportionalgröße gebe. Ehe aber dieß nicht bewiesen worden, kann der Beweis im Grundtexte nicht befriedigend seyn. Denn es wird ohne allen Beweis angenommen; es läßt sich auch nicht, so viel ich einsehe, mittelst der vorhergehenden Sätze beweisen. Obige Behauptung als ein Axiom, hinter den Erklärungen des 5. Buches, aufzunehmen, wie Clavius, auf die Autorität anderer Ausleger, wollte, ist völlig unstatthaft. Euklides wenigstens beweiset sie nicht; zeigt auch erst im 12. S. des 6. Buches der Elemente, wie eine vierte Proportionalgröße gefunden werde. Nie nimmt er etwas in dem Beweise eines Satzes an, das er nicht vorher bewiesen hat, oder wovon nicht wenigstens die Möglichkeit an sich klar ist. Denn aus einem nicht evidenten Satze kann kein evidenter Schluß gezogen werden. Daher haben wir in die Stelle des hergebrachten Beweises, den wahrscheinlich Theon oder ein Anderer für den ächten Euklidischen, der ihm zu weitläufig vorkam, unterschob, wieder den bündigern Beweis gesetzt.

So wie der 17. Satz, wovon der 18. der umgekehrte ist, mittelst des 1. und 2. Satzes dieses Buchs bewiesen wird, so muß auch der 18. durch den 5. und 6, die von dem 1. und 2. die umgekehrten sind, dargethan wer-

werden; auf diese Art haben wir unsern Beweis geführt. Der 5. und 6. Satz aber werden bey keinem Satze dieses Buches, wie wir es gegenwärtig besitzen, gebraucht, können auch bey keinem andern in den Elementen, außer bey dem 18., mit Vortheil angewandt werden. Daraus läßt sich untrüglich abnehmen, daß Euklides seinen Beweis auf dieselben Sätze gegründet habe, und daß der von uns wiederhergestellte Beweis, welcher, wie es auch nicht anders seyn kann, von dem Beweise des 17. Satzes der umgekehrte ist, von Eudoxus oder Euklides Beweise nicht verschieden sey. Der 5. und 6. Satz würden ganz müßig da stehen, wenn sie bey den Beweisen des 5. Buches nicht Anwendung fänden, da doch alle übrige Sätze vom Gleichvielfachen gebraucht worden sind.

Hieronymus Saccherius, von dem wir ein Werk unter dem Titel, Euclides ab omni nævo vindicatus, Mediol. 1733, besitzen, hat diesen Makel am Beweise des 18. Satzes auch bemerkt. Um ihn wegzuschaffen, und dem Beweise, wie er jetzt vorhanden ist, die nöthige Evidenz zu geben, versucht er, Seite 115 des vorhin gedachten Werkes, folgenden Satz darzuthun.

„Es seyen (Fig. 36 d.) vier Größen A, B, C, D, „die entweder alle gleichartig, oder von denen die bey„den ersten für sich, die beyden letzten wieder für sich „gleichartig sind: so behaupte ich, daß die Verhältniß „C:D entweder der Verhältniß A:B gleich, oder „größer, oder kleiner, als diese, sey."

Nachdem er zwey Sätze, als Lehrsätze, vorausgeschickt hat, fährt er fort:

„Unter allen möglichen Gleichvielfachen der ersten „A, der dritten C, und zugleich unter allen möglichen „Gleichvielfachen der zweyten B, der vierten D, kann es „entweder irgend ein Vielfaches EF von A geben, das „irgend einem Vielfachen IK von B, und zugleich, in dem„selben Falle, irgend ein Vielfaches GH von C, das „irgend einem Vielfachen LM von D gleich ist, oder

„eine

„eine solche Gleichheit findet nie Statt. Ist das Erste; „so folgt aus dem schon vorher Erwiesenen, daß A:B = „C:D sey. Ist das zweyte; so finden sich gleiche Viel„fache entweder nur auf der einen oder der andern „Seite, etwa für A und B, oder auf keiner Seite. „Ist jenes der Fall; so folgt aus Euklides Erklärung der „größern und kleinern Verhältniß, daß A:B entweder „> oder < C:D sey, je nachdem GH, das Vielfache der „C, kleiner oder größer als LM, das Vielfache der D, „ist. Hingegen, wenn dieses der Fall ist, kann in An„sehung der A und B das Vielfache EF der A kleiner als „das Vielfache IK der B, und dabey, in Betrachtung „der C und D, das Vielfache GH der C größer als das „Vielfache LM der D seyn. Alsdann ist, nach derselben „Euklidischen Erklärung, A:B < oder > C:D."

„Daher bleibt jenes Axiom (der oben aufgestellte Satz) erwiesen" u. s. w.

Keinesweges! Dieses Axiom ist damit noch gar nicht dargethan! Denn das, was nach dem Verfasser seyn kann, kann in unzählichen Fällen nicht seyn; und daher ist sein Beweis kein Beweis. Es sey z. B. A die Seite, B die Diagonale eines Quadrats, C die Seite, D die Diagonale eines andern Quadrats: so kann kein Vielfaches der A einem Vielfachen der B, so wenig als ein Vielfaches der C einem Vielfachen der D gleich seyn, wie bekannt ist; und gleichwohl kann es nie der Fall werden, daß, wenn ein gewisses Vielfaches der A größer oder kleiner als ein gewisses Vielfaches der B ist, ein Vielfaches der C kleiner oder größer als ein Vielfaches der D sey, nähmlich, wenn man von A, C Gleichvielfache, und von B, D, auch Gleichvielfache nimmt. Denn A, B, C, D sind proportionirt, wo (5, 5. E.), wenn das Vielfache der A $\geq$ Vielfache der B ist, auch das Vielfache der C $\geq$ Vielfache der D seyn muß.

Derselbe Einwurf, den wir gegen diesen Beweis des 18. Satzes gemacht haben, trifft nicht minder den

Beweis, welchen Einige von 6, 1. S. geben; denn dieser ruhet auf dem nähmlichen unsichern Grunde.

[Sacherius schickt Folgendes dem Beweise seines Satzes vorauf. Wenn vier Größen A, B, C, D vorhanden sind, so nehme man von der ersten A, der dritten C, beliebige Gleichvielfache E, G, desgleichen von der zweyten B, der vierten D, zwey beliebige Gleichvielfache I, L, alsdann ist klar:

1. Die Verhältniß A:B werde der C:D gleich seyn, wenn es sich in einem Falle solcher genommenen Gleichvielfachen trifft, daß E=I, und G=L ist.

2. Die Verhältniß A:B werde >C:D seyn, wenn es sich in einem Falle solcher genommenen Gleichvielfachen trifft, das E>I, aber G nicht >L ist; oder E=I, (wie ichs mit Clavius erkläre) aber G<L.]

Der 19. Satz.

Text: Zusatz. Verhalten sich Ganze, wie Stücke von ihnen; so verhalten sich auch die Reste, wie solche Stücke. Der Beweis liegt im Beweise des Satzes.

[Nähmlich, wenn AB:CD = AE:CF; so ist EB:FD=AE:CF.

Denn nach dem Erwiesenen ist AB:CD=EB:FD. Nun war angenommen, AB:CD=AE:CF; folglich (5, 11. S.) EB:FD=AE:CF.]

Der E. Satz. Lehrsatz.

[Text hinter dem 19. Satze.]

Sind (Fig. 37.) vier Größen AB, BE, CD, DF, proportionirt: so sind sie auch zurückkehrend proportionirt. [Vergl. die 17. Erkl.]

Da

Da AB : BE = CD : DF; so ist (5, 17. S.) getrennt AE : EB = CF : FD, und (5, B. S.) umgekehrt EB : AE = FD : CF. Folglich (5, 18. S.) verbunden BE + AE : AE = DF + FC : FC, das ist zurückkehrend, AB : AB — BE = CD : CD — DF, oder AB : AE = CD : CF.

Note: Der von uns dem 19. S. hinzugefügte Zusatz ist eben so brauchbar wie der Satz selbst. Uebrigens zeigt der Zusatz im Grundtexte offenbar, daß das 5. Buch von Männern, die der Geometrie nicht recht kundig waren, müsse verderbt worden seyn. Die zurückkehrende Verhältniß hängt gar nicht vom 19. Satze ab, und der Beweis, welchen unterschiedene Ausleger des Euklides mittelst des 19. S. davon geben, ist nichts weniger als befriedigend; wie schon Clavius bemerkt, dem man den bündigen Beweis, welchen wir im Satze E mitgetheilt haben, verdankt. Er aber gab ihn als einen Zusatz zum 19. Satze, mit den Anfangsworten; Daraus folgt leicht ꝛc.; ob es sich gleich auf keine Weise daraus schließen läßt.

Der 20. Satz.

Text: Erster Fall. Es sey A > C u. s. w. [Wie in der deutschen Uebersetzung, außer, daß wegen des Schlusses „Folglich ist D : E > F : E" auf den Zusatz beym 13. S. verwiesen wird.]

Zweyter Fall. (Fig. 38ª.) Es sey A = C; so ist auch D = F. Denn wenn A = C ist: so ist (5, 7. S.) A : B = C : B. Nun war angenommen A : B = D : E; auch ist (5, B. S.) C : B = F : E; folglich (5, 11. S.) D : E = F : E. Daher (5, 9. S.) D = F.

Dritter Fall. (Fig. 38ᵇ.) Es sey A < C; so ist auch D < F. Denn aus dem Angenommenen ist C > A; aber aus demselben und (5, B. S.) ist auch C : B =

C, und D, E, von A, B, gewisse Gleichvielfache sind, F ein Vielfaches der C, und D > F ist: so ist (5, 5. E.) E > F. Nun war E nicht > F; welches einander widerspricht. Folglich muß, wenn A : C = B : C ist, auch A = B seyn.

Zweytens. Es habe die C zu der A und zu der B einerley Verhältniß; so wird behauptet, daß A = B sey.

Wäre dieß nicht, so sey A > B. Nun ist, wie im Vorigen gezeigt worden, F ein gewisses Vielfaches der C, und E, D, sind Gleichvielfache der B, A, in der Art, daß zwar F die E, nicht aber die D, übertrifft. Da C : B = C : A, und F, das Vielfache der ersten C, die E, das Vielfache der zweyten B, übertrifft; so wird auch (5, 5. E.) F, das Vielfache der dritten C, die D, das Vielfache der vierten A, übertreffen. Aber F übertraf die D nicht; welches einander widerspricht. Folglich muß, wenn C : B = C : A ist, A = B seyn.

Note: Wir haben den Beweis dieses Satzes deutlicher entwickelt, als es im Grundtexte geschehen ist.

Der 10. Satz.

Text: Erstlich. (Fig. 33.) Es habe A zu C eine größere Verhältniß, als B zu C; so wird behauptet, daß A > B sey.

Denn da A zu der C eine größere Verhältniß hat, als B zu der C; so lassen sich (5, 7. E.) von A, B gewisse Gleichvielfache D, E, und von C ein gewisses Vielfaches F, in der Art angeben, daß das Vielfache F der C zwar von dem Vielfachen D der A, aber nicht auch von dem Vielfachen E der B übertroffen werde. Folglich ist D > E; folglich ist, weil D, E von A, B Gleichvielfache sind, (5, IV. G.) A > B.

Zweytens. Es habe C zu der B eine größere Verhältniß als zu der A; so wird behauptet, daß B < A sey.

Denn

Denn es sind (5, 7. E.) F ein gewisses Vielfaches der C, und E, D gewisse Gleichvielfache der B, A, so daß F zwar die E, nicht aber auch die D übertrifft. Folglich ist E < D, und da E, D von B, A Gleichvielfache sind, so ist (5, IV. G.) B < A.

Note: Es war nöthig, für diesen Satz einen andern Beweis zu geben, da der in den Griechischen und Lateinischen Ausgaben nicht ächt und genau ist. Die Wörter Größer, Gleich, Kleiner werden in einem andern Sinne von Größen, in einem andern von Verhältnissen gebraucht, wie dieß aus 5, 5-7. E. deutlich erhellet. Laßt uns also einmahl an diesen Erklärungen den Beweis des 10. Satzes prüfen. Er lautet: „Es habe A zu der C eine größere Verhältniß, „als B zu der C; so behaupte ich, daß A > B sey. Wäre „A nicht > B; so wäre entweder A = B, oder A < B. „Nun kann A nicht = B seyn, weil sonst A, B zu der „C dieselbe Verhältniß haben müßten. Sie haben aber „nicht dieselbe Verhältniß zu der C; folglich ist auch A „nicht = B." Das Beweisende dieser Schlußreihe liegt hierin: Wenn A : C = B : C ist, und man nimmt von A, B beliebige Gleichvielfache, auch von C ein gewisses Vielfaches: so wird, wenn das Vielfache von A größer als das Vielfache der C ist, auch Kraft 5, 5. E. das Vielfache der B größer als das Vielfache der C seyn. Aber da nach der Voraussetzung die A zu der C eine größere Verhältniß hat, als die B zu der C; so lassen sich Kraft 5, 7. E. von A, B, gewisse Gleichvielfache, und von C ein gewisses Vielfaches angeben, so daß zwar das Vielfache der A, aber nicht das Vielfache der B, größer als das Vielfache der C sey. Dieses aber widerspricht dem Vorhergehenden gerade zu. Folglich ist A nicht = B.

Jetzt fährt der Beweis so fort: „Allein eben so „wenig ist A < B. Die im entgegengesetzten Falle würde zu der C die A eine kleinere Verhältniß, als die B, „haben. Nun ist dieses nicht; folglich ist auch nicht A < B" u. s. w. Es heißt hier, die A würde zu der

C eine kleinere Verhältniß, als die B zu der C, haben; oder, welches daſſelbe iſt, die B würde zu der C eine größere Verhältniß, als die A zu der C, haben. Dieß heißt Kraft 5, 7. E., es werden ſich von A, B gewiſſe Gleichvielfache und von C ein gewiſſes Vielfaches ſo angeben laſſen, daß zwar das Vielfache der B, aber nicht auch das Vielfache der A, größer als das Vielfache der C ſey. Und da war zu beweiſen, daß dieß niemahls eintreten könne, wenn die Verhältniß der A zu der C größer als die Verhältniß der B zu der C iſt, folglich darzuthun, daß in dieſem Falle das Vielfache der A ſtets das Vielfache der C übertreffe, wenn das Vielfache der B daſſelbe übertrifft. Denn, ſobald dieß erwieſen iſt, ſo erhellet auch, daß die B zu der C keine größere Verhältniß, als die A zu der C, das iſt, A zu C keine kleinere Verhältniß, als B zu C, haben könne. Dieß aber iſt im Beweiſe des 10. Satzes gar nicht dargethan. Wäre der 10. Satz einmahl ſtreng erwieſen, ſo würde es unmittelbar aus ihm folgen; da es ſich ohne ihn nicht leicht erweiſen läßt, wie Jeder bey dem Verſuche finden wird. Daher iſt denn auch der Beweis des 10. Satzes nicht befriedigend. Derjenige, welcher den im Grundtexte vorhandenen Beweis des 10. Satzes, ſtatt des Beweiſes von Eudoxus oder Euklides, gab, ſcheint von dem Axiom, eine Größe kann nicht zugleich größer und kleiner als eine andere ſeyn, welches, von Größen ausgeſagt, völlig klar iſt, auf Verhältniß eine irrige Anwendung gemacht zu haben. Was Einem und demſelben gleich iſt, iſt ſelbſt gleich, iſt zwar, von Größen geſagt, ein höchſt evidentes Axiom; aber Euklides gebraucht es nicht, wenn er beweiſet, daß Einer und derſelben Verhältniß gleiche Verhältniſſe ſelbſt gleich ſind, ſondern thut dieſen Lehrſatz im 11. Satze ausführlich dar. Daß aber der Beweis, welchen wir in den Text geſetzt haben, mit Eudoxus oder Euklides Beweiſe ganz derſelbe ſey, läßt ſich kaum in Zweifel ziehen, da ſich die Concluſion des 10. Theorems kurz und gerade zu

aus

aus 5, 7. E., welche die größere Verhältniß angehet, herleiten läßt.

Der oben erwähnte Satz, nähmlich daß, wenn A zu C eine größere Verhältniß als B zu C hat, und von A, B, gewisse Gleichvielfache, von C ein gewisses Vielfaches, gemacht werden, alsdann aber das Vielfache der B größer als das Vielfache der C ist, auch das Vielfache der A größer als das Vielfache der C sey, wird so bewiesen.

Es seyen (Fig. 34.) D, E Gleichvielfache von A, B, und F ein Vielfaches von C, so daß E>F: so ist auch D>F.

Da A zu C eine größere Verhältniß, als B zu C, hat; so ist (5, 10. S.) A>B. Folglich ist D, das Vielfache der A, größer als E, dasselbe Vielfache der B. Nun ist E>F; folglich um so mehr D>F.

Der 13. Satz.

Text: Zusatz. Und wenn die erste zu der zweyten eine größere Verhältniß, als die dritte zu der vierten, die dritte aber zu der vierten dieselbe Verhältniß, wie die fünfte zur sechsten, hat: so läßt sich auf ähnliche Art beweisen, daß die erste zu der zweyten eine größere Verhältniß, als die fünfte zu der sechsten, habe.

Note: In Commandini's, Brigg's und Gregory's Uebersetzungen steht im Anfange des Beweises: „und das Vielfache der C übertrifft zwar das Vielfache „der D, aber das Vielfache der E übertrifft nicht das „Vielfache der F." Dieß ist wörtlich aus dem Griechischen übersetzt. Allein der Sinn fordert offenbar, daß es heiße: „so daß das Vielfache der C zwar das Viel„fache der D, aber nicht das Vielfache der E das Vielfache „der F übertreffe." So nach der richtigen Lesart verbessert fand sich auch diese Stelle in den ersten Ausgaben der Elemente nach der Version des Commandini, welche

zu

zu Oxford gedruckt wurden. In den spätern Ausgaben hingegen, wenigstens in der vom Jahre 1747, ist dieser Fehler des Grundtextes beybehalten worden.

Noch haben wir diesem Satze einen Zusatz gegeben, der bey dem 20. und 21. Satze brauchbar, und eben so nützlich, wie der Satz selbst, ist.

Der 14. Satz.

Text: Erstlich. [Wie in der deutschen Uebersetzung.]

Zweytens. (Fig. 35ª.) Es sey A=C; so ist auch B=D. Denn, da A:B=C, das ist A, :D; so ist (5, 9. S.) B=D.

Drittens. (Fig. 35ᵇ.) Es sey A<C; so ist auch B<D. Denn, da C>A, und C:D=A:B; so ist, nach dem ersten Falle, D>B, das ist B<D.

Note: Wir haben es für rathsam geachtet, auch die beyden Fälle, deren Beweise der Grundtext nicht hat, hinzuzufügen, da ihre Beweise mit dem Beweise des ersten Falles nicht übereinkommen.

Der 17. Satz.

Text: Nimm von AE, EB, CF, FD beliebige Gleichvielfache GH, HK, LM, MN; von EB, FD aber wieder noch andere beliebige Gleichvielfache KO, NP. Da GH von AE, HK von EB ein Gleichvielfaches ist; so ist auch (5, 1. S.) GH von AE, und GK von AB ein Gleichvielfaches. Nun ist GH von AE, LM von CF ein Gleichvielfaches; folglich ist GK von AB so vielfach, wie LM von CF. Ferner, da LM von CF, MN von FD ein Gleichvielfaches ist; so ist (5, 1. S.) LM von CF dasselbe Vielfache, das LN von CD ist. Nun war LM von CF, GK von AB ein Gleichvielfaches; folglich ist GK von AB so vielfach, wie LN von CD;

CD; also sind GK, LN von AB, CD Gleichvielfache. Wieder, da HK von EB, MN von FD ein Gleichvielfaches, aber auch KO von EB, NP von FD ein Gleichvielfaches ist: so ist (5, 1. G.) HO von EB so vielfach, wie MP von FD. Da AB : BE = CD : DF, und von AB, CD die Gleichvielfachen GK, LN, aber von EB, FD andere gewisse Gleichvielfache HO, MP genommen sind; so ist, (5, 5. E.) wenn GK ≷ HO, auch LN ≷ MP. Wenn aber GH > KO, so ist auch, wenn zu Beyden HK hinzukommt, GK > HO; also LN > MP; also, nach Wegnahme der MN von Beyden, LM > NP. Folglich ist, wenn GH > KO, auch LM > NP. Eben so läßt sich beweisen, daß, wenn GH = KO, auch LM = NP, und wenn GH < KO, auch LM < NP seyn werde. Nun sind GH, LM von AE, CF beliebige Gleichvielfache, und KO, NP von EB, FD andere beliebige Gleichvielfache. Folglich AE : EB = CF : FD.

Note: Wir haben die Folge der Schlüsse in diesem Beweise, durch einige Veränderungen, natürlicher geordnet.

Der 18. Satz.

Text: Mache von AB, BE, CD, DF, beliebige Gleichvielfache GH, HK, LM, MN; von BE, DF aber wieder noch andere beliebige Gleichvielfache KO, NP. Da also KO, NP Gleichvielfache von BE, DF, und KH, NM von denselben Größen Gleichvielfache sind: so ist, wenn KO ≷ KH, auch NP ≷ NM.

Nun sey (Fig. 36.) erstlich KO nicht größer als KH, so wird auch NP nicht größer als NM seyn. Da GH, HK Gleichvielfache von AB, BE sind, und AB > BE ist; so ist (5, III. G.) GH > KH. Aber KO ist nicht > KH, folglich ist GH > KO. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß LM > NP sey. Folglich, wenn KO nicht > KH ist, so wird auch GH, das Vielfache

der AB, stets größer als KO, das Vielfache der BE, und zugleich LM, das Vielfache der CD, größer als NP, das Vielfache der DF, seyn.

Zweytens (Fig. 36b.) sey KO > KH; so wird auch, wie gezeigt worden, NP > NM seyn. Da die ganze GH von der ganzen AB dasselbe Vielfache ist, welches die von der GH weggenommene HK von der von AB weggenommenen BE ist; so ist (5, 5. S.) der Rest GK von dem Reste AE das nähmliche Vielfache, welches GH von AB, oder auch LM von CD ist. Auf gleiche Weise ist, weil LM von CD, die von LM weggenommene MN von der von CD weggenommenen DF, einerley Vielfaches ist, auch (5, 5. S) der Rest LN von dem Reste CF ein solches Vielfaches, wie die ganze LM von der ganzen CD. Nun waren LM von CD, GK von AE, Gleichvielfache; folglich sind GK von AE, LN von CF, Gleichvielfache. Da aber KO, NP, von BE, DF Gleichvielfache, und von jenen KH, NM auch Gleichvielfache der BE, DF weggenommen sind; so sind (5, 6. S.) die Reste HO, MP denen BE, DF entweder gleich, oder doch von ihnen Gleichvielfache.

Es sey also zuerst HO = BE, und MP = DF. Da AE : EB = CF : FD, und von AE, CF die Gleichvielfachen GK, LN genommen sind: so ist (5, 4. Zus.) GK : EB = LN : FD. Aber HO = BE; MP = DF; folglich GK : HO = LN : MP. Folglich ist (5, A. S.) wenn GK ≷ HO, auch LN ≷ MP.

Es seyen (Fig. 36c.) zweytens HO, MP Gleichvielfache der EB, FD. Da AE : EB = CF : FD, und von AE, CF die Gleichvielfachen GK, LN, aber von EB, FD andere beliebige Gleichvielfache HO, MP genommen sind; so ist (5, 5. E.), wenn GK ≷ HO, auch LN ≷ MP; welches gleichfalls im vorigen Falle dargethan war. Wenn daher GH > KO, und man nimmt auf beyden Seiten KH weg; so wird GK die HO, mithin auch LN die MP, und, wenn zu Beyden die NM hin-

hinzukommt, die LM die NP übertreffen. Also wird, übertrifft GH die KO, auch LM die NP übertreffen. Auf ähnliche Weise läßt sich darthun, daß, wenn GH = KO, oder GH < KO, ist, auch LM = NP, oder LM < NP sey. In dem Falle, worin KO nicht größer als KH ist, war bewiesen, daß GH stets größer als KO, und ebenfalls LM > NP sey. Nun sind GH, LM, von AB, CD beliebige Gleichvielfache, und KO, NP, von BE, DF andere beliebige Gleichvielfache; folglich ist (5, 5. E.) AB : BE = CD : DF.

Note: Der Beweis dieses Satzes ist auf keine Weise von Euklides; auch ist er unmethodisch. Denn es es wird darin vorausgesetzt, daß es zu drey gegebenen Größen, wovon wenigstens zwey gleichartig sind, eine vierte Proportionalgröße gebe. Ehe aber dieß nicht bewiesen worden, kann der Beweis im Grundtexte nicht befriedigend seyn. Denn es wird ohne allen Beweis angenommen; es läßt sich auch nicht, so viel ich einsehe, mittelst der vorhergehenden Sätze beweisen. Obige Behauptung als ein Axiom, hinter den Erklärungen des 5. Buches, aufzunehmen, wie Clavius, auf die Autorität anderer Ausleger, wollte, ist völlig unstatthaft. Euklides wenigstens beweiset sie nicht; zeigt auch erst im 12. S. des 6. Buches der Elemente, wie eine vierte Proportionalgröße gefunden werde. Nie nimmt er etwas in dem Beweise eines Satzes an, das er nicht vorher bewiesen hat, oder wovon nicht wenigstens die Möglichkeit an sich klar ist. Denn aus einem nicht evidenten Satze kann kein evidenter Schluß gezogen werden. Daher haben wir in die Stelle des hergebrachten Beweises, den wahrscheinlich Theon oder ein Anderer für den ächten Euklidischen, der ihm zu weitläufig vorkam, unterschob, wieder den bündigern Beweis gesetzt.

So wie der 17. Satz, wovon der 18. der umgekehrte ist, mittelst des 1. und 2. Satzes dieses Buchs bewiesen wird, so muß auch der 18. durch den 5. und 6, die von dem 1. und 2. die umgekehrten sind, dargethan wer-

werden; auf diese Art haben wir unsern Beweis geführt. Der 5. und 6. Satz aber werden bey keinem Satze dieses Buches, wie wir es gegenwärtig besitzen, gebraucht, können auch bey keinem andern in den Elementen, außer bey dem 18., mit Vortheil angewandt werden. Daraus läßt sich untrüglich abnehmen, daß Euklides seinen Beweis auf dieselben Sätze gegründet habe, und daß der von uns wiederhergestellte Beweis, welcher, wie es auch nicht anders seyn kann, von dem Beweise des 17. Satzes der umgekehrte ist, von Eudoxus oder Euklides Beweise nicht verschieden sey. Der 5. und 6. Satz würden ganz müßig da stehen, wenn sie bey den Beweisen des 5. Buches nicht Anwendung fänden, da doch alle übrige Sätze vom Gleichvielfachen gebraucht worden sind.

Hieronymus Sacherius, von dem wir ein Werk unter dem Titel, Euclides ab omni nævo vindicatus, Mediol. 1733, besitzen, hat diesen Makel am Beweise des 18. Satzes auch bemerkt. Um ihn wegzuschaffen, und dem Beweise, wie er jetzt vorhanden ist, die nöthige Evidenz zu geben, versucht er, Seite 115 des vorhin gedachten Werkes, folgenden Satz darzuthun.

„Es seyen (Fig. 36 d.) vier Größen A, B, C, D, „die entweder alle gleichartig, oder von denen die bey„den ersten für sich, die beyden letzten wieder für sich „gleichartig sind: so behaupte ich, daß die Verhältniß „C:D entweder der Verhältniß A:B gleich, oder „größer, oder kleiner, als diese, sey."

Nachdem er zwey Sätze, als Lehrsätze, vorausgeschickt hat, fährt er fort:

„Unter allen möglichen Gleichvielfachen der ersten „A, der dritten C, und zugleich unter allen möglichen „Gleichvielfachen der zweyten B, der vierten D, kann es „entweder irgend ein Vielfaches EF von A geben, das „irgend einem Vielfachen IK von B, und zugleich, in dem„selben Falle, irgend ein Vielfaches GH von C, das „irgend einem Vielfachen LM von D gleich ist, oder

„eine

„eine solche Gleichheit findet nie Statt. Ist das Erste; „so folgt aus dem schon vorher Erwiesenen, daß A:B = „C:D sey. Ist das zweyte; so finden sich gleiche Viel„fache entweder nur auf der einen oder der andern „Seite, etwa für A und B, oder auf keiner Seite. „Ist jenes der Fall; so folgt aus Euklides Erklärung der „größern und kleinern Verhältniß, daß A:B entweder „> oder < C:D sey, je nachdem GH, das Vielfache der „C, kleiner oder größer als LM, das Vielfache der D, „ist. Hingegen, wenn dieses der Fall ist, kann in An„sehung der A und B das Vielfache EF der A kleiner als „das Vielfache IK der B, und dabey, in Betrachtung „der C und D, das Vielfache GH der C größer als das „Vielfache LM der D seyn. Alsdann ist, nach derselben „Euklidischen Erklärung, A:B < oder > C:D."

„Daher bleibt jenes Axiom (der oben aufgestellte Satz) erwiesen" u. s. w.

Keinesweges! Dieses Axiom ist damit noch gar nicht dargethan! Denn das, was nach dem Verfasser seyn kann, kann in unzählichen Fällen nicht seyn; und daher ist sein Beweis kein Beweis. Es sey z. B. A die Seite, B die Diagonale eines Quadrats, C die Seite, D die Diagonale eines andern Quadrats: so kann kein Vielfaches der A einem Vielfachen der B, so wenig als ein Vielfaches der C einem Vielfachen der D gleich seyn, wie bekannt ist; und gleichwohl kann es nie der Fall werden, daß, wenn ein gewisses Vielfaches der A größer oder kleiner als ein gewisses Vielfaches der B ist, ein Vielfaches der C kleiner oder größer als ein Vielfaches der D sey, nähmlich, wenn man von A, C Gleichvielfache, und von B, D, auch Gleichvielfache nimmt. Denn A, B, C, D sind proportionirt, wo (5, 5. E.), wenn das Vielfache der A ≷ Vielfache der B ist, auch das Vielfache der C ≷ Vielfache der D seyn muß.

Derselbe Einwurf, den wir gegen diesen Beweis des 18. Satzes gemacht haben, trifft nicht minder den

Beweis, welchen Einige von 6, 1. S. geben; denn dieser ruhet auf dem nähmlichen unsichern Grunde.

[Saccherius schickt Folgendes dem Beweise seines Satzes vorauf. Wenn vier Größen A, B, C, D vorhanden sind, so nehme man von der ersten A, der dritten C, beliebige Gleichvielfache E, G, desgleichen von der zweyten B, der vierten D, zwey beliebige Gleichvielfache I, L, alsdann ist klar:

1. Die Verhältniß A:B werde der C:D gleich seyn, wenn es sich in einem Falle solcher genommenen Gleichvielfachen trifft, daß E=I, und G=L ist.

2. Die Verhältniß A:B werde >C:D seyn, wenn es sich in einem Falle solcher genommenen Gleichvielfachen trifft, das E>I, aber G nicht >L ist; oder E=I, (wie ichs mit Clavius erkläre) oder G<L.]

Der 19. Satz.

Text: Zusatz. Verhalten sich Ganze, wie Stücke von ihnen; so verhalten sich auch die Reste, wie solche Stücke. Der Beweis liegt im Beweise des Satzes.

[Nähmlich, wenn AB:CD = AE:CF; so ist EB:FD=AE:CF.

Denn nach dem Erwiesenen ist AB:CD=EB:FD. Nun war angenommen, AB:CD=AE:CF; folglich (5, 11. S.) EB:FD=AE:CF.]

Der E. Satz. Lehrsatz.

[Text hinter dem 19. Satze.]

Sind (Fig. 37.) vier Größen AB, BE, CD, DF, proportionirt: so sind sie auch zurückkehrend proportionirt. [Vergl. die 17. Erkl.]

Da

Da AB : BE = CD : DF; so ist (5, 17. S.) getrennt AE : EB = CF : FD, und (5, B. S.) umgekehrt EB : AE = FD : CF. Folglich (5, 18. S.) verbunden BE + AE : AE = DF + FC : FC, das ist zurückkehrend, AB : AB — BE = CD : CD — DF; oder AB : AE = CD : CF.

Note: Der von uns dem 19. S. hinzugefügte Zusatz ist eben so brauchbar wie der Satz selbst. Uebrigens zeigt der Zusatz im Grundtexte offenbar, daß das 5. Buch von Männern, die der Geometrie nicht recht kundig waren, müsse verderbt worden seyn. Die zurückkehrende Verhältniß hängt gar nicht vom 19. Satze ab, und der Beweis, welchen unterschiedene Ausleger des Euklides mittelst des 19. S. davon geben, ist nichts weniger als befriedigend; wie schon Clavius bemerkt, dem man den bündigen Beweis, welchen wir im Satze E mitgetheilt haben, verdankt. Er aber gab ihn als einen Zusatz zum 19. Satze, mit den Anfangsworten: Daraus folgt leicht ꝛc.; ob es sich gleich auf keine Weise daraus schließen läßt.

Der 20. Satz.

Text: Erster Fall. Es sey A > C u. s. w. [Wie in der deutschen Uebersetzung, außer, daß wegen des Schlusses „Folglich ist D : E > F : E" auf den Zusatz beym 13. S. verwiesen wird.]

Zweyter Fall. (Fig. 38ª.) Es sey A = C; so ist auch D = F. Denn wenn A = C ist: so ist (5, 7. S.) A : B = C : B. Nun war angenommen A : B = D : E; auch ist (5, B. S.) C : B = F : E; folglich (5, 11. S.) D : E = F : E. Daher (5, 9. S.) D = F.

Dritter Fall. (Fig. 38ᵇ.) Es sey A < C; so ist auch D < F. Denn aus dem Angenommenen ist C > A; aber aus demselben und (5, B. S.) ist auch C : B =

F:E, und B:A=E:D; folglich, nach dem ersten Falle, F>D, das ist D<F.

Der 21. Satz.

Text: Erster Fall. Es sey A>C, u. s. w. [Wie in der deutschen Uebersetzung. Vergl. den ersten Fall im vorigen Satze.]

Zweyter Fall. (Fig. 39ª.) Es sey A=C; so ist auch D=F. Denn weil A=C; so ist (5, 7. S.) A:B=C:B. Nun ist nach der Voraussetzung A:B=E:F; auch ist (5, B. S.) C:B=E:D; folglich (5, 11. S.) E:F=E:D. Daher (5, 9. S.) D=F.

Dritter Fall. (Fig. 29ᵇ.) Es sey A<C; so ist auch D<F. Denn es ist C>A. Nun ist nach der Voraussetzung und (5, B. S.) C:B=E:D, und B:A=F:E; folglich ist, nach dem ersten Falle, F>D, das ist D<F.

Der 22. Satz.

Text: Es seyen zuerst drey Größen A, B, C u. s. w. Nimm von A, D beliebige Gleichvielfache G, H, u. s. w. [In der deutschen Uebers.]

Nun seyen zweytens vier Größen A, B, C, D, und eben so viele andere E, F, G, H, geordnet proportionirt: so sind sie aus dem Gleichen proportionirt.

Da drey Größen A, B, C mit eben so vielen andern E, F, G geordnet proportionirt sind; so ist, nach dem ersten Falle, A:C=E:G. Aber C:D=G:H; folglich, wieder nach dem ersten Falle, A:D=E:H. Und so weiter, so viele Größen vorhanden sind.

Der

Der 23. Satz.

Text: Es seyen zuerst drey Größen A, B, C, u. s. w. Nimm von A, B, D beliebige Gleichvielfache, u. s. w. [In der deutschen Uebers.]

Nun seyen zweytens vier Größen A, B, C, D mit eben so vielen andern E, F, G, H, zerstreut proportionirt: so sind sie aus dem Gleichen proportionirt.

Denn da drey Größen A, B, C mit eben so vielen andern F, G, H zerstreut proportionirt sind; so ist, nach dem ersten Falle, A:C=F:H. Aber C:D=E:F; folglich, wieder nach dem ersten Falle, A:D=E:H. Und so weiter, so viele Größen vorhanden sind.

Der 24. Satz.

Text: Zusatz 1. Unter der Voraussetzung des Satzes verhält sich auch der Unterschied der ersten und fünften zu der zweyten, wie der Unterschied der dritten und sechsten zu der vierten Größe. Der Beweis ist mit dem Beweise des Satzes derselbe, außer daß, statt der Schlußart, durch Verbindung, die Schlußform, durch Trennung, gebraucht werden muß.

[Nähmlich (Fig. 40.) wenn AB:C=DE:F, und BG:C=EH:F; so ist AB—BG:C=DE—EH:F, oder AI:C=DK:F.

Denn da BG:C=EH:F; so ist C:BG=F:EH. Nun ist auch AB:C=DE:F; folglich AB:BG=DE:EH. Folglich (5. 17. S.) AB—BG:BG=DE—EH:EH, das ist, AI:BG=DK:EH. Aber BG:C=EH:F; folglich AI:C=DK:F.]

Zusatz 2. Der Satz selbst aber gilt allgemein von so vielen Größen, als man will, von welchen die erstern, jede

jede für sich, zu einerley zweyten dieselbe Verhältniß haben, wie die übrigen, jede für sich, zu einerley vierten; wie klar ist.

[Von den Größen A, B, C habe, jede für sich, zu einerley Größe D dieselbe Verhältniß, welche von den Größen E, F, G, jede für sich, zu einerley Größe H haben: so ist A+B+C: D=E+F+G:H.

Denn, wenn A:D=E:H, und B:D=F:H; so ist, nach dem Erwiesenen, A+B: D=E+F:H. Nun ist auch C:D=G:H; folglich, wieder nach dem Erwiesenen, A+B+C:D=E+F+G:H. Und so immer, wie viele Größen in gleicher Anzahl in beyden Reihen auch seyn mögen.]

Note zu den Sätzen 20 bis 24. Die Beweise des 20. und 21. Satzes sind im Grundtexte kürzer, als sie Euklides von leichtern Sätzen, in den vorhergehenden und folgenden Büchern, gibt. Daher dünkte es uns rathsam zu seyn, sie mehr zu entwickeln. Den 22. und 23. Satz haben wir, wie es die Sache erfordert, auf beliebig viele Größen ausgedehnt, und in dieser Allgemeinheit muß auch der 24. Satz verstanden werden, wie wir im 2. Zusatze angemerkt haben. Außer dem hat er noch einen Zusatz erhalten, der mit dem Satze selbst von gleicher Brauchbarkeit ist.

D. Philipp Naudé tadelt in einer Abhandlung, welche nach seinem Tode in der Geschichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1745 bekannt gemacht wurde, den vorgeblich dunkeln Ausdruck des 23. Satzes, weßhalb der Beweis zu weitläufig gerathen sey. Allein der daselbst angeführte Satz ist nicht, wie der Verfasser selbst gesteht, von Euklides, sondern von Tacquet. Nun ist er zwar nicht sehr bequem ausgedrückt, aber doch, der Hauptsache nach, völlig einerley mit dem Satze, der sich in den Elementen befindet. Dunkel ist darin nichts; der

Ver-

Verfasser der Abhandlung hat nur die Proportionalgrößen nicht in der besten Ordnung aufgestellt, und dieß gibt dem Satze das Ansehen von Dunkelheit. Euklides hat ohne Zweifel den 23. und 22. S. in strenger Allgemeinheit, auf beliebig viele Größen, nicht etwa bloß auf drey Größen, von denen je zwey mit je zweyen proportionirt sind, ausgedehnt. Dieser Allgemeinheit entspricht die Aussage des Naudéschen Satzes nicht.

Der Beweis aber, welcher in gedachter Abhandlung von 5, 23. S. gegeben wird, taugt nichts. Denn angenommen, die Proportionalgrößen seyen Ebenen oder Körper, so läßt sich kein Rectangel, das er, ohne Sachkenntniß, ein Product nennt, aus irgend zweyen von ihnen denken. Wollte man sagen, man müsse in diesem Falle gerade Linien, den Ebenen oder Körpern proportionirt, annehmen, so würde gerade dadurch der Beweis ungleich weitläufiger werden, als der Euklidische. Und gesetzt auch, der Naudésche Beweis wäre richtig; wer würde nicht sehen, daß er in das 5. Buch nicht gehöre?

[Tacquets Aussage des mehrerwähnten Satzes lautet: Wenn die erste Größe A zur zweyten B wie die erste O zur zweyten Q, und jene zweyte B zur dritten C, wie eine gewisse andere Dritte R zur ersten O; so ist auch (ex aequo perturbate) durch unrichtig geordnete Gleichheit (par egalité mal rangée) A : C = R : Q.

Naudé drückt es so aus: Wenn in zwey Proportionen, A : B = O : Q, und B : C = R : O, die mittlern Glieder B, O der einen entweder wieder die mittlern, oder die äußern Glieder der andern, also beyden Proportionen gemein sind: so behaupte ich, daß, wenn man die nicht gemeinschaftlichen Glieder A, Q der ersten Proportion zu den äußern, und die beyden nicht gemeinschaftlichen Glieder C, R der zweyten

ten zu den mittlern Gliedern macht, also A:C =R:Q setzt, man wieder eine richtige Proportion erhalte.

Der Beweis dieses Satzes, fährt Naudé fort, ist daraus klar, daß vier Größen proportionirt sind, wenn das Product aus den mittlern dem Producte aus den äußern gleich ist. Denn man darf hier bloß sagen, daß A:C= R:Q seyn müsse; weil A.Q=C.R, da beyde Producte einem und demselben Producte B.O gleich sind, wie sich aus den im Eingange angenommenen Proportionen ergibt.]

Der F. Satz Lehrsatz.

[Text zum Schlusse des 5. Buches.]

Die aus gleichen Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse sind gleich.

Es sey A:B=D:E, und B:C=E:F; so ist die aus den Verhältnissen A:B, B:C zusammengesetzte Verhältniß, das ist, nach Erkl. A, die Verhältniß A:C der Verhältniß D:F gleich, welche aus D:E, E:F zusammengesetzt ist.

Denn weil hier drey Größen A, B, C mit eben so vielen andern D, E, F geordnet proportionirt sind; so ist (5, 22. S.) aus dem Gleichen A:C=D:F.

Wieder sey A:B=E:F, und B:C=D:E; so ist (5, 23. S.) aus dem Gleichen A:C=D:F; das ist, die aus den Verhältnissen A:B, B:C zusammengesetzte Verhältniß A:C ist der aus den Verhältnissen D:E, E:F zusammengesetzten D:F gleich.

Dasselbe gilt auch in beyden Fällen, wenn Verhältnisse aus beliebig vielen, gleichen Verhältnissen zusammengesetzt sind.

Der

Der G. Satz. Lehrsatz.

[Text zum Schlusse des 5. Buches.]

Sind mehrere Verhältnisse mehrern andern, jede für sich gleich; so ist auch die aus den erstern zusammengesetzte Verhältniß der aus den letztern zusammengesetzten Verhältniß gleich.

Es sey A:B=E:F; C:D=G:H; ferner sey A:B=K:L; C:D=L:M; so ist (5, A. E.) K:M aus den Verhältnissen K:L, L:M zusammengesetzt, die, jede für sich, den Verhältnissen A:B, C:D gleich sind. Ueberdieß sey E:F=N:O, und G:H=O:P; so ist N:P aus den Verhältnissen N:O, O:P zusammengesetzt, welche, jede für sich, den Verhältnissen E:F, G:H gleich sind.

Nun ist zu beweisen, daß K:M=N:P sey.

Da K:L=A:B=E:F=N:O, und L:M=C:D=G:H=O:P; so ist (5, 22. S.) aus dem Gleichen K:M=N:P.

Der H. Satz. Lehrsatz.

[Text zum Schlusse des 5. Buches.]

Ist eine aus mehrern Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß einer aus mehrern andern Verhältnissen zusammengesetzten Verhältniß gleich, und man nimmt von beyden gleiche Verhältnisse weg: so muß auch das Uebrige noch in gleicher Verhältniß seyn.

Es seyen die Verhältnisse A:B, B:C, C:D, D:E und E:F; ferner die Verhältnisse G:H, H:K, K:L, und L:M; auch sey die aus den ersten zusammengesetzte Verhältniß A:F der aus den letzten zusammengesetzten Verhältniß G:M gleich; über dieß die Verhältniß A:D, zusammengesetzt aus den Verhältnissen A:B, B:C, C:D, einerley mit der Verhältniß G:K, zusammengesetzt

setzt aus den Verhältnissen G:H, H:K: so ist die aus den übrigen von den ersten Verhältnissen D:E, E:F zusammengesetzte Verhältniß D:F der Verhältniß K:M gleich, welche aus den übrigen von den letzten Verhältnissen K:L, L:M zusammengesetzt ist.

Denn da nach der Voraussetzung A:D=G:K; so ist (5, B. S.) umgekehrt D:A=K:G. Aber A:F=G:M; folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen D:F=K:M.

Note zu den Sätzen F, G, H: Diese Sätze haben wir dem 5. Buche angehängt, weil sie von alten und neuern Geometern oft gebraucht werden, da sich, ohne deren Benutzung, in vielen Fällen die zusammengesetzten Verhältnisse in Beweisen nicht anwenden lassen.

Wer eine gründliche Vertheidigung der in diesem 5. Buche vorgetragenen Lehre von den Verhältnissen und eine vollständige Widerlegung aller von Andr. Tacquet, Alph. Borelli, und Andern dawider gemachten Einwendungen zu lesen wünscht, dem empfehlen wir des großen Barrow's Lectiones Mathematicas, die 7. und 8. Vorlesung vom Jahre 1666.

Und nun, in Rücksicht auf diese verbesserte Ausgabe des 5. Buches, unterschreibe ich des gelehrten Barrow Urtheil über dasselbe mit aller Bereitwilligkeit, „daß „nähmlich in dem ganzen Werke der Elemente nichts mit „so vorzüglichem Scharfsinne erfunden, mit so strenger „Bündigkeit erwiesen, und mit so vollkommener Genau„igkeit abgehandelt worden, als die Proportionslehre.“ Nicht ohne Ursache läßt sich hoffen, daß die Geometer der Meynung seyn werden, dieß habe sich, seit Theons bis auf gegenwärtige Zeit, nicht mit eben so gutem Grunde sagen lassen.

Das sechste Buch.

Erklärungen.

2. Text: Wiederkehrende Figuren (reciprocae), nähmlich Triangel und Parallelogramme, sind diejenigen worin die Seiten, welche zwey ihrer Winkel einschließen, so proportionirt sind, daß eine Seite der ersten Figur sich zu einer Seite der zweyten verhält, wie die andere Seite der zweyten zu der andern Seite der ersten.

Note: Die zweyte Erklärung scheint nicht von Euklides, sondern von einem der Geometrie Unkundigen herzurühren. Weder Euklides, noch, so viel ich weiß, irgend ein anderer Geometer gedenkt der wiederkehrenden Figuren. Die Erklärung ist dunkel ausgedrückt, daher wir sie deutlicher gefaßt haben. Jedoch wäre ihr vielleicht folgende vorzuziehen:

Zwey Größen sind mit zwey andern wiederkehrend proportionirt, wenn sich die eine von den ersten zu einer von den letzten verhält, wie von den letzten die andere zu der andern von den ersten.

4. Note: Wir haben die 5. Erklärung aus Gründen, von welchen wir unten beym 23. S. dieses Buches Rechenschaft geben werden, aus den Elementen weggelassen,

lassen, worin sie seit Theons Zeiten zur großen Unbequemlichkeit der Anfänger eine Stelle behauptet hat.

Der 1. Satz.

Text: Zusatz. Hieraus ist klar, daß Triangel und Parallelogramme, welche gleiche Höhen haben, sich wie ihre Grundlinien verhalten.

Denn bringt man die Figuren so an einander, daß ihre Grundlinien in Einer geraden Linie sind, und fället von den Gipfeln der Triangel Perpendikel auf die Grundlinien; so ist die gerade Linie durch die Gipfel (1, 33. S.) mit derjenigen parallel, worin die Grundlinien liegen, weil beyde Perpendikel einander gleich und parallel sind. Der Beweis wird wie im Satze geführt, wenn man wie dort construirt.

Note: Dieser Zusatz wird sehr häufig gebraucht.

Der 2. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 41.) Wird mit einer Seite, BC, eines Triangels, ABC, eine gerade Linie, DE, parallel gezogen: so schneidet sie die beyden andern Seiten, AB, AC, auch wenn solche [nach D und E] verlängert werden, proportionirt, [daß BD : AD = CE : AE]. Und sind zwey Seiten, AB, AC, eines Triangels, ABC, auch wenn solche [nach D und E] verlängert werden, von einer geraden Linie proportionirt geschnitten [daß BD : AD = CE : AE]: so ist diese Linie, DE, der dritten Seite, BC, parallel.

Note: Diesen Satz haben wir allgemeiner ausgedrückt. [Der Beweis aber bleibt der nähmliche.]

Der

Der A. Satz. Lehrsatz.

[Text hinter dem 3 Satze.]

Wird (Fig. 42.) der äußere Winkel, CAE, an einem Triangel, ABC, von einer geraden Linie, AD, halbirt: so sind die dadurch in der verlängerten Grundlinie gemachten, zwischen den Endpunkten derselben und der halbirenden Linie liegenden, Abschnitte, BD, DC, den übrigen Seiten des Triangels, BA, AC, proportionirt. Und sind gedachte Abschnitte BD, DC, den beyden übrigen Seiten des Triangels BA, AC, proportionirt: so halbirt die durch den Gipfel, A, und den Schneidungspunkt, D, gezogene gerade Linie, AD, den äußern Winkel, CAE, am Triangel, ABC.

Erster Theil. Es sey der äußere Winkel CAE von AD halbirt.

Ziehe (1, 31. S.) durch C die CF der AD parallel, und verlängere BC, bis sie die AD in D trifft; so ist (1, 29. S.) ACF = CAD. Nun ist CAD = DAE; folglich DAE = ACF. Ferner ist (1, 29. S.) DAE = CFA; also ACF = CFA; folglich (1, 6. S.) AF = AC. Nun ist FC der AD parallel; folglich (6, 2. S.) ist BD : DC = BA : AF. Aber vorhin war AF = AC; daher BD : DC = BA : AC.

Zweyter Theil. Es sey BD : DC = BA : AC. Ziehe AD, und derselben die CF parallel; so ist (6, 2. S.) BD : DC = BA : AF. Nun ist nach der Voraussetzung BD : DC = BA : AC; folglich (5, 11. S.) BA : AC = BA : AF; folglich (5, 9. S.) AC = AF. Daher ist (1, 5. S.) AFC = ACF. Nun ist (1, 29. S.) AFC = EAD, und ACF = CAD; folglich (1, 1. S.) EAD = CAD; folglich der äußere Winkel CAE am Triangel ABC von DA halbirt.

Note. Der im Satze A angeführte Fall, wenn des Triangels äußerer Winkel von einer geraden Linie halbirt

halbirt wird, ist eben so nützlich, wie der im dritten Satze von Halbirung eines innern Winkels, und deßhalb von uns mitgetheilt worden. Der Beweis für diesen Fall ist dem Beweise für jenen sehr ähnlich; dieß hat vielleicht einen ungeometrischen Herausgeber veranlaßt, den Satz mit seinem Beweise auszulassen. Pappus wenigstens macht von ihm, als von einem Elementar-Satze, jedoch ohne ihn zu beweisen, im 39. S. des 7. B. seiner Collect. Math. Gebrauch.

Der 7. Satz.

Text: Lehrsatz. Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, ein Winkel, A, einem Winkel, D, gleich ist, die Seiten aber, von welchen andere Winkel, B, E, eingeschlossen werden, proportionirt sind, und von den übrigen Winkeln, C, F, jeder zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner, oder einer von ihnen so groß, als ein rechter Winkel ist: so sind die Triangel gleichwinklig, und zwar diejenigen Winkel, B, E, gleich, welche von den proportionirten Seiten eingeschlossen werden.

Erster Fall. Wenn jeder der Winkel C, F kleiner als ein rechter ist. [Wie in der deutschen Uebersetzung.]

Zweyter Fall; wenn jeder der Winkel, C, F nicht kleiner als ein rechter Winkel ist. [Wie in der deutschen Uebersetzung.]

Dritter Fall; (Fig. 43.) wenn einer von den Winkeln C, F, etwa C, ein rechter ist. Wären nun ABC, DEF ungleich; so wird, wenn man an AB, im Punkte B derselben, den Winkel ABG = DEF ansetzt, wie im ersten Falle bewiesen, daß BG = BC, und BCG = BGC sey. Nun ist BCG = R; folglich auch (1, 5. S.) BGC = R. Folglich sind im △ BGC zwey Winkel zusammen nicht kleiner als zwey rechte, welches (1, 17. S.)

S.) unmöglich ist. Folglich ist der Triangel ABC dem Triangel DEF gleichwinklig.

Note: Wir haben den im Grundtexte ausgelassenen dritten Fall, welcher in geometrischen Beweisen mannichfaltige Anwendung findet, hinzugefügt.

Der 8. Satz.

Note: Offenbar hat Jemand den Euklidischen Beweis dieses Satzes verändert. Denn nachdem er bewiesen hat, daß die Triangel gleichwinklig sind, zeigt er noch besonders, daß die gleiche Winkel einschließenden Seiten proportionirt sind; als wenn dieß nicht schon im 4. S. dieses Buches dargethan wäre. Dieser unnöthige Beysatz findet sich in der Version aus dem Arabischen nicht, und ist auch von uns weggelassen worden. [Hiermit ist vorzüglich die deutsche Uebersetzung zu vergleichen.]

Der 9. Satz.

Text: Aufgabe. Von einer gegebenen geraden Linie, AB, einen verlangten Theil abzuschneiden.

Vom Punkte A ziehe eine gerade Linie AC, die mit AB einen beliebigen Winkel einschließe. Nimm in AC einen beliebigen Punkt D, und mache AC zu demselben Vielfachen der AD, welches die AB von dem von ihr abzuschneidenden Theile ist, ziehe alsdann BC und der BC durch D die DE parallel.

Da im △ ABC die DE der Seite BC parallel ist: so ist (6, 2. S.) CD:DA=BE:EA; folglich (5, 18. S.) verbunden CA:AD=BA:AE. Nun ist CA ein Vielfaches der AD; folglich ist (5, D. S.) BA dasselbe Vielfache der AE. Ein solcher Theil folglich AD von AC ist, ein eben solcher Theil ist auch AE von AB; mithin AE der Theil, welcher von AB abgeschnitten werden soll.

Note:

Note: Im Grundtexte ist der Beweis dieses Satzes auf den besondern Fall eingeschränkt, daß von der gegebenen geraden Linie der dritte Theil abgeschnitten werden soll. In dieser Einschränkung hat ihn Euklides gewiß nicht geführt. Ueberdieß wird geschlossen, daß von vier Proportionalgrößen die dritte dasselbe Vielfache der vierten sey, welches die erste von der zweyten ist. Dieser Schluß aber ist nirgends im 5. Buche, wie es jetzt vorhanden ist, durch einen Beweis gerechtfertigt; sondern der Herausgeber nimmt es, wie manches Andere, auf dem Grunde des verworrenen Begriffes an, den sich Nichtgeometer von Proportionalgrößen machen. Dieß machte es nothwendig, von diesem Satze einen allgemeinen und richtigen Beweis zu geben.

Der 18. Satz.

Text: Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, eine Figur zu zeichnen, welche einer gegebenen geradlinigen Figur ähnlich sey, und mit ihr ähnliche Lage habe.

Erster Theil. Die gegebene geradlinige Figur CE sey vierseitig.

Ziehe DF, und setze (1, 23. S.) an die Endpunkte der geraden Linie AB die Winkel BAG = DCF, und ABG = CDF; so ist (1, 32. S.) AGB = CFD; folglich △ FCD dem △ GAB gleichwinklig. An die Endpunkte der geraden Linie BG setze die Winkel BGH = DFE, und GBH = FDE; so ist GHB = FED; folglich △ FDE dem △ GBH gleichwinklig. Da nun AGB = CFD; BGH = DFE; so ist AGH = CFE. Aus demselben Grunde ist ABH = CDE; auch war A = C, und GHB = FED; folglich ist die geradlinige, vierseitige Figur ABHG der gegebenen vierseitigen Figur CDEF gleichwinklig.

Nun

Nun sind aber auch die gleiche Winkel einschließenden Seiten derselben proportionirt. Denn, da die △△ GAB, FCD gleichwinklig sind; so ist (6, 4. S.) BA: AG = DC: CF. Ferner AG: GB = CF: FD, und wegen Gleichwinkligkeit der △△ BGH, DFE ist auch GB: GH = FD: FE; folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen AG: GH = CF: FE. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß AB: BH = CD: DE. Auch ist (6, 4. S.) GH: HB = FE: ED. Folglich sind (6, 1. E.) die vierseitigen Figuren ABHG, CDEF ähnlich.

Zweyter Theil. (Fig. 44.) Die gegebene geradlinige Figur CDKEF sey fünfseitig.

Ziehe DF, DE, und zeichne auf der gegebenen geraden Linie AB eine vierseitige, der vierseitigen Figur CDEF ähnliche und mit ihr ähnlich liegende, Figur ABHG. An die Endpunkte der geraden Linie BH setze die Winkel HBL = EDK, und BHL = DEK; so ist auch L = K. Wegen Aehnlichkeit der vierseitigen Figuren ABHG, CDEF, ist GHB = FED; auch war BHL = DEK; folglich GHL = FEK. Aus gleichen Gründen ist ABL = CDK. Folglich sind die fünfseitigen Figuren AGHLB, CFEDK gleichwinklig. Wegen Aehnlichkeit der vierseitigen Figuren AGHB, CFED ist GH: HB = FE: ED; aber (6, 4. S.) HB: HL = ED: EK; folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen GH: HL = FE: EK. Aus demselben Grunde ist AB: BL = CD: DK; aber wegen Gleichwinkligkeit der △△ BLH, DKE ist auch BL: LH = DK: KE. Folglich sind (6, 1. E.) die fünfseitigen Figuren AGHLB, CFEKD ähnlich.

Eben so verfährt man, wenn auf einer gegebenen geraden Linie eine Figur gezeichnet werden soll, welche einer gegebenen sechs- oder mehrseitigen Figur ähnlich sey und mit ihr ähnliche Lage habe.

Note: Den Beweis im Grundtexte halten wir für fehlerhaft, denn er schränkt den Satz auf vierseitige

Figuren ein; und zeigt nicht, wie er auch von fünf- oder mehrseitigen Figuren gelte. Ueber dieß wird, ganz wider Euklides Methode, wie sich aus dem folgenden 19. Satze ergibt, ohne Verwechselung der mittlern Glieder geschlossen, daß in zwey gleichwinkligen Triangeln die Seite des einen zu der homologen Seite des andern sich verhalte, wie eine andere Seite des ersten zu einer homologen Seite des zweyten. Derselbe Fehler kommt noch einmahl in der Conclusion vor. Denn es wird nicht gezeigt, daß die Seiten, welche in den geradlinigen Figuren gleiche Winkel einschließen, proportionirt sind; der Verfasser dieses Beweises dachte wieder nicht an die Verwechselung der mittlern Glieder. Deßhalb hielten wir es für besser, den Beweis durchaus nach der Methode zu führen, welcher sich Euklides im 20. S. dieses Buches bedient. Wir haben auch gezeigt, daß der Satz für fünfseitige Figuren gelte, um die Art, wie er auf Figuren von beliebig vielen Seiten angewendet werde, einleuchtend zu machen.

Der 20. Satz.

[Simson hat bloß den andern, als den kürzern, Beweis aufgenommen.]

Der 22. Satz.

[Den Lehnsatz hat Simson ausgelassen.]

Der 23. Satz.

[Bey dem Schlusse, $K:M=(K:L)+(L:M)$, ist, im Texte, auf die Erklärung A im 5. Buche verwiesen worden.]

Note: Gewöhnlich halten Anfänger die Lehre von Zusammensetzung der Verhältnisse für das Schwerste in den Elementen. Theon gab allerdings davon einen undeut-

deutlichen, ungeometrischen Begriff, indem er statt der richtigen Erklärung, welche Eudoxus, oder Euklides unmittelbar hinter der Erklärung des Dreyfachen einer Verhältniß im 5. Buche gab, wohin sie eigentlich gehört, die 5. Erkl. des 6. B. einschob. Theons Erklärung nähmlich lautet: Eine Verhältniß heißt aus Verhältnissen zusammengesetzt, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινά. Commändin übersetzt dieß: quando rationum quantitates inter se multiplicatae aliquam efficiunt rationem, wenn die Größen der Verhältnisse mit einander multiplicirt eine gewisse Verhältniß geben. Wallis verstehet unter πηλικότητες, rationum exponentes, Exponenten der Verhältnisse; Gregory übersetzt die letzten Worte der Erklärung, illius facit quantitatem, die Größe einer Verhältniß geben. Allein, in welchem Sinne man auch die Wörter, Größen oder Exponenten der Verhältnisse, und Multiplication derselben nimmt, so bleibt die Erklärung dennoch unfruchtbar und ungeometrisch. Nur bey Zahlen läßt sich von Multiplication sprechen. Größe oder Exponent der Verhältniß ist (wie Eutocius in seinem Commentar über Archimedes Schrift von der Kugel und dem Cylinder bey dem 4. S. des 2. Buches, und die Neuern den Ausdruck erklären) die Zahl, welche in das Hinterglied multiplicirt das Vorderglied gibt, oder, was einerley ist, durch Division des Vordergliedes mit dem Hintergliede entstehet. Es gibt aber viele Verhältnisse, wo durch erwähnte Division keine Zahl entstehen kann; zum Beyspiel bey der Verhältniß der Diagonale eines Quadrats zu der Seite, und des Umkreises zum Durchmesser. Ueber dieß findet sich von gedachter Erklärung beym Euklid, Archimedes, Apollonius und andern Alten, bey denen die zusammengesetzte Verhältniß häufig vorkommt, auch nicht die schwächste Spur. Im 6, 23. S. der Elemente, wo der zusammengesetzten Verhältniß zum ersten Mahle erwähnt wird,

steht kein Wort, das sich auf jene Erklärung bezöge, da doch ihrer recht eigentlich an dieser Stelle hätte gedacht werden müssen; sondern die richtige Erklärung wird deutlich in den Worten angewandt, „aber die Verhältniß „K:M ist aus den Verhältnissen K:L und L:M zusammengesetzt." [In der deutschen Uebersetzung „so ist K:M = (K:L)+(L:M)"]. Theons Erklärung ist folglich ganz unnütz und unrichtig. Auch läßt sich kaum zweifeln, daß er sie in die Elemente einschob; denn sie findet sich in seinen Erläuterungen der Μεγάλη Σύνταξις [Almagest] des Ptolemäus, Seite 62, und ist dahin erläutert, daß sie bloß auf Zahlenverhältnisse anwendbar ist. Von hier wurde sie mit gedachter Erläuterung wörtlich in die Reihe der Erklärungen vor dem 6. Buche der Elemente versetzt, wie aus Hervagius Ausgabe erhellet. Zambertus und Commandinus haben sie denselben Erklärungen in ihren Lateinischen Versionen zugesellet; hingegen erkennen sie weder Campanus, noch, wie es scheint, die Arabischen Codices, welche er benutzte, an. Clavius urtheilt, auf Veranlassung der 6, 5. E., sehr richtig, daß die Erklärung der zusammengesetzten Verhältniß auf eben die Art konnte gemacht worden seyn, wie die Erklärungen vom Zwiefachen, Dreyfachen u. s. w. einer Verhältniß. „So „wie nähmlich Euklides sagt, von mehrern stetigen Pro„portionalgrößen sey die Verhältniß der ersten zur drit„ten das Zwiefache der ersten zur zweyten, die Verhält„niß aber der ersten zur vierten das Dreyfache der Ver„hältniß der ersten zur zweyten, das ist, eine aus zwey „oder drey gleichen Zwischenverhältnissen zusammenge„setzte Verhältniß, und so weiter fort; eben so läßt sich „auch von mehrern auf einander folgenden, gleichartigen, „obgleich nicht stetig proportionirten Größen sagen, die „Verhältniß der ersten zur letzten sey aus allen Zwischen„verhältnissen zusammengesetzt, — bloß darum, weil „solche Zwischenverhältnisse zwischen den beyden äußersten „Größen liegen, auf ähnliche Art, wie in 5, 10. E. die

„Ver-

„Verhältniß der ersten zur dritten das Zwiefache heißt, „lediglich aus dem Grunde, weil zwischen den beyden „äußersten Größen zwey gleiche Verhältnisse liegen. Der „ganze Unterschied zwischen dieser Zusammensetzung der „Verhältnisse und dem Zwiefachen, Dreyfachen einer „Verhältniß, welches im 5. Buche erläutert ist, wird „also bloß darin bestehen, daß hier alle Zwischenverhält„nisse gleich, dort aber nicht nothwendig gleich sind.“ Edmund Scarburgh, in seiner Englischen Uebersetzung der ersten sechs Bücher der Elemente, Seite 238. 266, ist gleichfalls von der Unächtheit der 6, 5. E. überzeugt, und hält dafür, daß die ächte Erklärung der zusammengesetzten Verhältniß schon in 5, 10. E. enthalten sey, oder doch aus ihr folge; gerade so, wie sich darüber Clavius in der angeführten Stelle erklärt. Jedoch behalten diese Geometer und andere Neuere die 6, 5. E. bey, und erläutern sie umständlich, statt daß sie sie aus den Elementen hätten vertilgen sollen.

Denn die Vergleichung der 6, 5. E. mit 8, 5. S. zeigt deutlich, daß jene untergeschoben ist. In diesem Satze nähmlich wird bewiesen, daß die Verhältniß zweyer Flächenzahlen, deren Seiten C, D; E, Z sind, aus den Verhältnissen solcher Seiten, C:E, D:Z zusammengesetzt sey. Nun ist nach 6, 5. E. und der Erläuterung, welche alle Commentatoren darüber geben, die aus den Verhältnissen C:E, D:Z zusammengesetzte Verhältniß die Verhältniß des Productes aus den Vordergliedern C, D zu dem Producte aus den Hintergliedern E, Z, das ist, der Flächenzahl, deren Seiten C, D, zu der Flächenzahl, deren Seiten E, Z sind. Daher ist 6, 5. E. völlig einerley mit 8, 5. S. Aus der einen oder der andern Stelle muß sie weggeschafft werden; denn es ist doch höchst unmethodisch, erst einen Satz als eine Erklärung aufzuführen und ihn nachher in der Reihe der Sätze zu beweisen. Unbedenklich aber gebührt dem 5. S. des 8. B. seine Stelle in den Elementen; denn in demselben

wird

wird von Flächenzahlen ganz dasselbe bewiesen, was 6, 23. S. von gleichwinkligen Parallelogrammen dargethan wird. Daraus erhellet denn zur Genüge, daß 6, 5. E. keine Stelle in den Elementen verdiene, auch daß sie nicht von Euklides, sondern von Theon oder einem Andern herrühre, der in der Geometrie wenig geübt war.

So viel ich weiß, hat noch Niemand den wesentlichen Nutzen der zusammengesetzten Verhältniß, der zu ihrer Einführung in die Geometrie berechtiget, gehörig gezeigt. Alle Sätze, bey denen von zusammengesetzter Verhältniß Gebrauch gemacht wird, lassen sich zwar auch ohne sie ausdrücken und erweisen; allein ihr Nutzen bestehet einzig darin, daß dadurch alle Umschreibungen vermieden, und entweder die Aussage, oder die Beweise der Sätze, oder beyde zugleich, kürzer werden. Wollte man z. B. 6, 23. S. ohne der zusammengesetzten Verhältniß zu erwähnen, ausdrücken, so würde er so lauten: Wenn zwey Parallelogramme gleichwinklig sind, und der Verhältniß einer Seite des ersten zu einer Seite des zweyten die Verhältniß einer angenommenen geraden Linie zu einer andern, auch der Verhältniß der übrigen Seite des ersten zu der übrigen Seite des zweyten Parallelogramms die Verhältniß jener zweyten geraden Linie zu einer dritten gleich gemacht wird: so verhält sich das erste Parallelogramm zum zweyten, wie die erste gerade Linie zu der dritten. Der Beweis würde mit dem gegebenen derselbe seyn. Da aber die Alten einsahen, daß dieser Satz könne kürzer ausgedrückt werden, wenn man die Verhältniß der ersten geraden Linie zur letzten mit einem Worte bezeichnete, welches auch auf die Zwischenverhältnisse, der ersten zur zweyten, der zweyten zur dritten, und so hinter einander fort, wenn mehrere gerade Linien vorhanden wären, hinwiese: so sagten sie, die Verhältniß der ersten zur letzten sey aus den Verhältnissen der ersten zur zweyten, der zweyten zur dritten, das ist, im vorliegenden Falle, aus solchen Verhältnissen zusammengesetzt, die den Verhältnissen der Seiten gleich sind.

Nun

Nun drückten sie den Satz, seinem Sinne unbeschadet, kürzer so aus: Die Verhältniß zweyer gleichwinkliger Parallelogramme ist aus Verhältnissen zusammengesetzt, die den Verhältnissen ihrer Seiten gleich sind. Noch kürzer so: Die Verhältniß gleichwinkliger Parallelogramme ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammengesetzt. Diese beyden letzten Formen des Satzes, vorzüglich die erste, schicken sich vollkommen zu dem Beweise, welchen der gegenwärtige Grundtext hat.

Indessen kann man den Beweis, wie Franz Candalla gezeigt hat, noch kürzer fassen. (Fig. 45.) Es seyen nähmlich ABCD, CEFG, gleichwinklige Parallelogramme. Vollende das Parallelogramm CDHG; so hat man drey Parallelogramme AC, CH, CF; folglich (nach der Erklärung der zusammengesetzten Verhältniß) AC:CF = (AC:CH) + (CH:CF). Nun ist AC:CH = BC:CG; CH:CF = DC:CE; folglich AC:CF = (BC:CG) + (CD:CE). Dieser Beweis stimmt zu der jetzt aufgenommenen Aussage des Satzes: Die Verhältniß gleichwinkliger Parallelogramme ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammengesetzt. Die gewöhnliche Lesart, „aus den Seiten zusammengesetzt" ist albern. Wir haben in dieser Ausgabe den Beweis des Grundtextes, ob er gleich weitläufiger als der ist, welchen Candalla gibt, deßwegen beybehalten, weil er zeigt, was dieser nicht zeigt, wie aus den gegebenen Verhältnissen der Seiten die daraus zusammengesetzte Verhältniß, das ist, die Verhältniß der Parallelogramme, gefunden werde. So sehen die Anfänger, wie sie in ähnlichen Fällen aus zwey oder mehrern Verhältnissen die daraus zusammengesetzte Verhältniß finden können.

Das Gesagte führt auf die Bemerkung, daß, für eine beliebige Menge gleichartiger Größen, A, B, C, D, u. s. w., die aus den Verhältnissen der ersten zur zweyten, der zweyten zur dritten, und so fort bis zur letzten, zusammengesetzte Verhältniß nichts anders

als

als ein Ausdruck, ein Nahme, sey, welcher die Verhältniß der ersten A zur letzten D bezeichnet und zugleich die Verhältnisse aller Größen unter sich, A:B, B:C, C:D, sie mögen gleich oder ungleich seyn, andeutet; gerade wie für stetig proportionirte Größen A, B, C, D, u. s. w., das Zwiefache der Verhältniß der ersten zur zweyten nur ein Ausdruck, ein Nahme, ist, damit die Verhältniß der ersten A zur dritten C und zugleich anzudeuten, daß zwischen der ersten und letzten zwey gleiche Verhältnisse A:B, B:C liegen; auch, wie das Dreyfache der Verhältniß der ersten zur zweyten ein Ausdruck, eine Benennung ist, wobey man an die Verhältniß der ersten A zur vierten D, und zugleich an die zwischen der ersten und letzten Größe befindlichen drey gleichen Verhältnisse A:B, B:C, C:D denkt. Dasselbe gilt von andern Vielfachen einer Verhältniß. Daß dieß der wahre Sinn sey, erhellet aus den Erklärungen des Zwiefachen und Dreyfachen einer Verhältniß, worin Euklides das Wort λεγεται, heißt, wird genannt, gebraucht. Ohne Zweifel drückte er sich eben so in der Erklärung der zusammengesetzten Verhältniß aus, welche Theon oder ein Anderer aus den Elementen ausstrich; denn dasselbe Wort ist in 6, 5. E. beybehalten worden, wo von der zusammengesetzten Verhältniß ein sehr unrichtiger Begriff gegeben wird. Zuweilen werden diese Erklärungen mit dem Worte λεγεται angeführt, wie im Beweise des 6, 19. S. „von der ersten sagt man, sie „habe, ἔχειν λέγεται, zur dritten eine Verhältniß, „welche das Zwiefache u. s. w." Commandini und Andere übersetzen unrichtig „hat" statt „man sagt, sie habe". Zuweilen wird λεγεται auch weggelassen, wie im Beweise des 6, 33. S., wo es heißt: „Die erste hat „ἔχει, zur vierten eine Verhältniß, die das Dreyfache „u. s. w." Ohne Zweifel bedeutet hier ἔχει einerley mit ἔχειν λέγεται. Eben so heißt es im 6, 23. S. „aber die Verhältniß K:M ist zusammengesetzt, συγκειται, „aus den Verhältnissen K:L und L:M" der Kürze wegen,

gen, statt daß es, wie in der Erklärung, heißen müßte, „aber von der Verhältniß K:M sagt man, sie sey zu„sammengesetzt, συγκεῖσθαι λέγεται“ ꝛc.

Hierdurch und durch die Lehrsätze, die wir dem 5. Buche zugesellet haben, läßt sich Alles deutlich einsehen, was sowohl bey den alten als auch bey den neuern Geometern von der zusammengesetzten Verhältniß vorkommt.

Der 24. Satz.

Text: Lehrsatz In jedem Parallelogramme, ABCD, sind die um die Diagonale, AC, liegenden Parallelogramme, EG, HK, dem ganzen, und einander ähnlich.

Da DC, GF parallel sind, so ist (1, 29. S.) ADC=AGF; und da BC, EF parallel sind, so ist ABC=AEF. Nun ist (1, 34. S.) BCD=DAB=EFG; folglich sind die Parallelogramme ABCD, AEFG gleichwinkelig. Da ABC=AEF, und BAC gemein; so sind die Triangel BAC, EAF gleichwinklig. Folglich (6, 4. S.) AB:BC=AE:EF. Nun sind (1, 34. S.) die gegenüber liegenden Seiten der Parallelogramme gleich; folglich (5, 7. S.) AB:AD=AE:AG; DC:CB=GF:FE; CD;DA=FG:GA. Folglich (6, 1. E.) sind die Parallelogramme ABCD, AEFG ähnlich. Aus gleichen Gründen sind die Parallelogramme ABCD, FHCK ähnlich; folglich (6, 21. S.) auch die Parallelogramme GE, KH.

Note: Den Beweis im Grundtexte scheint Jemand, der die Sache nicht recht verstand, aus zwey verschiedenen Beweisen des Satzes zusammengesetzt zu haben, von denen der eine auf 6, 2. S., der andere auf 6, 4. S. beruhet. Denn sobald er mittelst des 2. S., durch Verbindung und Verwechselung gezeigt hatte, daß die Seiten um den gemeinschaftlichen Winkel der Parallelogramme proportionirt sind, hätte er unmittelbar, nach 1, 34. S. und 5, 7. S. dasselbe von den Seiten um die

übri-

übrigen gleichen Winkel schließen können. Allein den Schluß versäumt er; zeigt, daß die Triangel und Parallelogramme gleichwinklig sind, und kommt erst auf einem langen Umwege durch 6, 4. S. und 5, 22. S. auf dieselbe Conclusion. Dieß zeigt doch wohl offenbar, daß Euklides diesen ungeschickten Beweis nicht gegeben haben kann. Wir haben daher alles Ueberflüssige weggelassen, und einen einfachern, auf 6, 4. S. beruhenden Beweis gegeben, den nähmlichen, welchen die Arabischen Codices mittelst 6, 2. S. und 5, 15. S. führen, nur daß diese die Verwechselung außer Acht lassen, auch die Gleichwinkligkeit der Parallelogramme nicht erweisen, die der Anfänger wegen dargethan werden mußte.

Der 25. Satz.

Text: Aufgabe. Eine geradlinige Figur zu zeichnen, welche der gegebenen, ABC, ähnlich und der andern gegebenen D, gleich sey.

Entwirf (1, 45. S.) an der geraden Linie BC ein der gegebenen geradlinigen Figur ABC gleiches Parallelogramm BE, und an der geraden Linie CE ein der andern gegebenen geradlinigen Figur D gleiches Parallelogramm CM, unter dem Winkel FCE = CBL; so ist (1, 29. 14. S.) BC mit CF, LE mit EM in Einer geraden Linie. Nimm (6, 13. S.) zwischen BC, CF die mittlere Proportionallinie GH, und zeichne (6, 18. S.) auf GH eine geradlinige Figur KGH, welche der geradlinigen Figur ABC ähnlich sey und mit ihr ähnliche Lage habe.

Da BC : GH = GH : CF; so ist (6, 20. 2. Zus.) BC : CF = Fig. ABC : Fig. KGH. Nun ist (6, 1. S.) BC : CF = BE : EF; folglich (5, 11. S.) Fig. ABC : Fig. KGH = BE : EF. Nun ist Fig. ABC = BE; folglich (5, 14. S.) Fig. KGH = EF. Aber EF = Fig. D; also Fig. KGH = D. Auch ist Fig. KGH ∽ Fig. ABC.

Note:

Note: Sehr deutlich ist es, daß eine unberufene Hand den Beweis, welchen Euklides von diesem Satze gegeben hatte, verfälscht hat. Denn nachdem der ungeometrische Herausgeber gezeigt hatte, daß Fig. ABC: Fig. KGH = BE: EF, so durfte er nur noch hinzusetzen: „Nun ist Fig, ABC = BE; folglich (5, 14. S.) Fig. KGH = EF;" allein zwischen beyde Schlüsse schiebt er den Schluß ein; „Folglich ist durch Verwechslung Fig. ABC: „BE = Fig. KGH: EF." Er glaubte nähmlich, daß sich in einer Proportion aus der Gleichheit der ersten und dritten Proportionalgröße auf die Gleichheit der zweyten und vierten nicht so deutlich, wie aus dem Gleichseyn der ersten und zweyten auf das Gleichseyn der dritten und vierten schließen lasse; da doch von jenem Schlusse in 5, 14. S., von diesem nirgends in den Elementen, die Statthaftigkeit erwiesen worden. Gesetzt auch, Euklides hätte den Satz, daß, wenn von vier Proportionalgrößen die erste der zweyten gleich ist, die dritte der vierten gleich sey, in seine Elemente aufgenommen, wie dieß nicht unwahrscheinlich ist; so würde er sich doch desselben in dem vorliegenden Falle nicht bedient haben, weil, ohne die hier überflüssige Verwechslung der mittlern Glieder, derselbe Schlußsatz, wie schon bemerkt ist, unmittelbar folgt. Wir haben dieß etwas umständlich gezeigt, theils, weil es ein untrügliches Kennzeichen von der Verfälschung ist, die Euklides Text gelitten hat, denn derselbe Fehler kommt im Grundtexte 11, 23, S. zwey Mahle, 12, 2. S. eben so oft, und 12, 5. 11. 12. 18. S. vor, jedoch ist in der Oxforder Ausgabe der Commandinischen Version in den angeführten Stellen des 12. Buches, die letzte ausgenommen, der Schluß, worin die Glieder verwechselt werden, mit Recht ausgelassen: theils, damit die Geometer sich vor der Anwendung gedachter Schlußart in ähnlichen Fällen hüten möchten; denn die Neueren, und unter mehrern Andern sogar Commandini in seinem Commentar über Pappus Alexandri-

brinus bey dem 5. S. des 3. B. Seite 6. b. und in einigen andern Stellen, fallen nicht selten in diesen Fehler. Der hergebrachte, irrige Begriff von Proportionalgrößen ist, wie es uns vorkommt, bey Vielen ein so hartnäckiges Vorurtheil geworden, daß es ihnen kaum möglich wird, den wahren Begriff aufzunehmen.

Obgleich die gegebene geradlinige Figur ABC, der eine andere ähnlich gemacht werden soll, von beliebiger Art seyn kann, so sprechen doch die Griechischen Codices in dem Beweise von einem Triangel, statt von einer geradlinigen Figur im Allgemeinen; dieser Fehler ist in der Oxforder Ausgabe der Commandinischen Version verbessert.

Der 26. Satz.

Text: Anmerkung. Um die folgenden drey Sätze desto leichter zu verstehen, bemerke man noch nachstehende Erklärungen:

1. Von einem Parallelogramme (Fig. 46.) sagt man, es werde an einer geraden Linie entworfen, wenn es auf derselben gezeichnet wird. Zum Beyspiel, das Parallelogramm AC heißt an der geraden Linie AB entworfen, wenn es auf derselben gezeichnet worden.

2. Von dem Parallelogramme AE sagt man, daß es mit einer Parallelogramm-Ergänzung an der geraden Linie AB entworfen sey, wenn seine Grundlinie AD kleiner als AB, folglich das Parallelogramm AE von dem auf der AB, unter demselben Winkel und zwischen einerley Parallellinien, gezeichneten Parallelogramme AC, um das Parallelogramm DC, welches die Ergänzung des AE zu dem AC heißt, unterschieden ist.

3. Von dem Parallelogramme AG sagt man, daß es mit einem Parallelogramm-Ueberschusse an der geraden Linie AB entworfen sey, wenn seine Grund-

Grundlinie AF größer als AB ist, und folglich AG das Parallelogramm AC um das Parallelogramm BG übertrifft.

Der 28. und 29. Satz.

Note: Diese beyden Aufgaben, wovon die erste auf dem Lehrsatze im 27. S. beruhet, sind vor allen in den Elementen die allgemeinsten und nützlichsten, und mittelst derselben lösen die Alten häufig andere Aufgaben auf. Dieß müssen Andr. Tacquet und Claud. Dechales wohl nicht gewußt haben, da sie behaupteten, diese Probleme wären ziemlich unnütz, und sie deßwegen aus ihren Ausgaben der Elemente wegließen. Bey den Geometern kommen häufig folgende Fälle dieser Probleme vor:

An einer gegebenen geraden Linie ein einem gegebenen Quadrate, oder gegebenen Rectangel, gleiches Rectangel zu entwerfen, dessen Ergänzung oder Ueberschuß ein Quadrat ist.

Zur Belehrung der Anfänger geben wir folgende Auflösung davon.

1. (Fig. 47.) An einer gegebenen geraden Linie AB ein einem Quadrate, dessen Seite C ist, gleiches Rectangel zu entwerfen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist; jedoch darf das gegebene Quadrat nicht größer seyn, als das Quadrat auf der halben AB.

Halbire AB in D. Ist nun □AD = □C; so ist das Verlangte geleistet. Ist aber □AD nicht = □C; so sey, wegen der Voraussetzung, AD > C. Errichte auf AB in D den Perpendikel DE, und mache denselben der C gleich; verlängere ED bis F, so daß EF = AD = DB werde; zeichne um E mit dem Halbmesser EF einen Kreis, der AB in G trifft; zeichne über GB das Quadrat GBKH; vollende das Rectangel AGHL, und ziehe EG.

Da

Da AB in D halbirt ist; so ist (2, 5. S.) AG × GB + □ DG (= □ DB = □ EF = □ EG) = □ ED + □ DG; folglich, wenn auf beyden Seiten □ DG weggenommen wird, AG × GB = □ ED = □ C. Nun ist AG × GB = AH, weil GH = GB; folglich AH = □ C. Folglich ist an der gegebenen geraden Linie AB ein dem gegebenen Quadrate von C gleiches Rectangel AH, dessen Ergänzung das Quadrat GK, entworfen.

2. (Fig. 48.) An einer gegebenen geraden Linie, AB, ein einem gegebenen Quadrate, dessen Seite C, gleiches Rectangel, dessen Ueberschuß ein Quadrat ist, zu entwerfen.

Halbire AB in D; errichte im Endpunkte B den Perpendikel BE; mache ihn der C gleich; ziehe DE; zeichne um D mit dem Halbmesser DE einen Kreis, der die verlängerte AB in G trifft; construire auf BG das Quadrat BGHK, und vollende das Rectangel AGHL.

Da AB in D halbirt, und ihr die BG gerade fort angesetzt ist; so ist (2, 6. S.) AG × GB + □ DB (= □ DG = □ DE) = □ EB + □ BD. Folglich ist, wenn man □ DB auf beyden Seiten wegnimmt, AG × GB = □ BE = □ C. Nun ist AG × GB = AH, weil GH = GB; folglich AH = □ C. Folglich ist an der geraden Linie AB ein dem gegebenen □ C gleiches Rectangel AH, dessen Ueberschuß das Quadrat GK ist, entworfen.

3. (Fig. 49.) An eine gegebene gerade Linie, AB, ein einem unter den geraden Linien, C, D, enthaltenen Rectangel gleiches Rectangel zu entwerfen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist; jedoch darf das gegebene Rectangel nicht größer als das Quadrat der halben AB seyn.

Auf der AB und an einerley Seite derselben errichte in den Endpunkten die Perpendikel AE, BF; mache AE = C, BF = D; ziehe EF; halbire sie in G; zeichne um G mit dem Halbmesser GE einen Kreis, welcher die

AE

AE in H schneide; ziehe HF; mit derselben durch G die GK, und mit AE die GL bis an die AB parallel.

Da EHF = EAB = R; so sind AB, HF parallel. Nun sind auch AH, BF parallel; folglich AH = BF; folglich EA × AH = EA × BF = C × D. Da EG = GF, und AE, LG, BF parallel sind; so ist AL = LB. Außer dem ist (3, 3. S.) EK = KH. Nun ist nach der Bedingung C × D nicht größer als □AL = □½AB; folglich ist auch EA × AH nicht größer als □AL, das ist, als □KG. Wird auf beyden Seiten □KE hinzugesetzt; so ist (2, 6. S.) □AK nicht größer als □EK + □KG, das ist, als □EG; folglich ist auch die AK oder GL nicht größer als GE. Ist nun GE = GL; so berührt der Kreis FHF die gerade Linie AB in L, (3, 36. S.) □AL ist = EA × AH = C × D, und das Verlangte ist geleistet. Sind hingegen EG, GL ungleich; so muß EG größer seyn; folglich wird der Kreis EHF die gerade Linie AB schneiden. Dieß geschehe in den Punkten M, N. Ueber NB werde das Quadrat NBOP construirt, und das Rectangel ANPQ vollendet. Da (3, 3. S.) ML = LN, auch, wie vorhin erwiesen worden, AL = LB; so ist AM = NB. Folglich AN × NB = NA × AM, das ist (3, 36. Zus.) EA × AH = C × D. Nun ist AN × NB = AP, weil PN = NB; folglich AP = C × D. Folglich ist an der gegebenen geraden Linie AB ein Rectangel AP entworfen, welches dem gegebenen Rectangel C × D gleich, und dessen Ergänzung das Quadrat BP ist.

4. (Fig. 50.) An eine gegebene gerade Linie, AB, ein, dem unter den geraden Linien, C, D, enthaltenen Rectangel gleiches, Rectangel zu entwerfen, dessen Ueberschuß ein Quadrat ist.

Auf der AB, auf entgegengesetzten Seiten derselben, errichte in den Endpunkten A, B die Perpendikel AE, BF, und mache AE = C, BF = D. Ziehe EF, halbire sie in G; zeichne um G mit dem Halbmesser GE einen

Kreis,

Kreis, der die verlängerte EA in H, die verlängerte AB in M, N treffe; ziehe HF; durch G die GL an AB der AE parallel; auf BN construire das Quadrat NBOP, und vollende das Rectangel ANPQ.

Da EHF = EAB = R; so sind AB, HF parallel; folglich AH = BF, und EA × AH = EA × BF = C × D. Da ML = LN, AL = LB; so ist MA = BN; folglich AN × NB = MA × AN, das ist (3, 35. S.) EA × AH = C × D = AP. Folglich ist an der geraden Linie AB ein dem Rectangel C × D gleiches Rectangel AP entworfen, dessen Ergänzung das Quadrat BP ist.

Willebrordus Snellius gab, so viel mir bekannt ist, zuerst die Auflösung des 3. und 4. Problems, in seinem Apollonius Batavus, und nachher der gelehrte Halley in einem Scholion über 18. S. des 8. B. des Apollonius von den Kegelschnitten, dessen Werk er wiederherstellte.

Das 3. Problem pflegt man auch so auszudrücken: Eine gegebene gerade Linie AB in einem Punkte N zu schneiden, daß das unter den Abschnitten AN, NB enthaltene Rectangel einem gegebenen Flächenraume gleich sey; oder, was einerley ist: Eines Rectangels Größe und die Linie AB, welche dessen Seiten zusammen gleich ist, sind gegeben; man soll die Seiten finden.

Das 4. Problem ist mit diesem einerley: In einer gegebenen geraden Linie AB, wenn sie verlängert worden, einen Punkt N zu finden, daß das unter AN, NB enthaltene Rectangel einem gegebenen Flächenraume gleich sey; oder, welches auf Eins hinauskommt: Eines Rectangels Größe und seiner Seiten Unterschied AB sind gegeben; man soll die Seiten finden.

Der 31. Satz.

Text: Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Triangel, ABC, ist die Figur auf der dem rechten Winkel

Winkel gegenüber liegenden Seite, BC, den ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren auf den diesen Winkel einschließenden Seiten, BA, AC, zusammen gleich.

Fälle aus A auf BC den Perpendikel AD; so sind (6, 8. S.) die an dem Perpendikel liegenden Triangel ABD, ADC dem ganzen Triangel ABC und einander ähnlich. Folglich (6, 4. S.) CB:BA = BA:BD; folglich (6, 20. Zus. 2.) CB:BD = E:F; folglich (5, B. S.) umgekehrt BD:CB = F:E. Aus denselben Gründen ist DC:CB = G:E. Folglich (5, 24. S.) BD + DC : BC = F + G : E. Nun ist BD + DC = BC; folglich (5, A. S.) E = F + G.

Note: Beym Beweise dieses Satzes ist im Grundtexte die Umkehrung der Glieder zwey Mahle ausgelassen worden. Wir haben diese Zwischenschlüsse ergänzt, damit nach 5, 24. S. der Schlußsatz richtig gezogen werden konnte; wie es Clavius vor uns zuerst gethan hat.

Der 32. Satz.

Note: Die Aussage des obigen 26. S. ist nicht allgemein genug. Nicht allein liegen zwey ähnliche Parallelogramme von ähnlicher Lage, die einen Winkel gemein haben, um einerley Diagonale; sondern auch die Diagonalen zweyer ähnlichen Parallelogramme von ähnlicher Lage, die gleiche Scheitelwinkel haben, liegen in Einer geraden Linie. Hiervon scheint ein directer Beweis, der mittelst des 32. Satzes geführt war, vorhanden gewesen zu seyn. Dieser 32. S. kann auch auf folgende, kürzere Art erwiesen werden.

Es seyen (Fig. 51.) in den Triangeln GAF, HFC die Seiten AG, GF den Seiten FH, HC proportionirt, daß also AG:GF = FH:HC sey; auch sey AG der HF, GF der HC parallel: so ist AF mit FC in Einer geraden Linie.

Ziehe (1, 31. S.) durch C die CK mit FH parallel, daß CK die verlängerte GF in K treffe.

Da sowohl AG als auch KC der FH parallel ist; so sind (1, 30. S.) AG, KC parallel; folglich (1, 29. S.) AGF = FKC. Nun ist AG : GF = FH : HC = (1, 34. S.) CK : KF, und schließen gleiche Winkel ein; folglich sind (6, 6. S.) die Triangel AGF, CKF gleichwinklig; folglich AFG = CFK. Aber GFK ist Eine gerade Linie; folglich (1, 14. S.) AF mit FC in Einer geraden Linie.

Nun läßt sich der 26. S. mittelst des 32., wie folget, erweisen. (Fig. 51.)

Die Diagonalen zweyer ähnlichen Parallelogramme von ähnlicher Lage, welche entweder einen gemeinschaftlichen Winkel, oder gleiche Scheitelwinkel haben, liegen in Einer geraden Linie.

Erster Fall. Die ähnlichen Parallelogramme ABCD, AEFG von ähnlicher Lage haben den gemeinschaftlichen Winkel BAD.

Verlängere EF, GF bis H, K, und ziehe FA, FC.

Wegen Aehnlichkeit der Parallelogramme ABCD, AEFG, ist DA : AB = GA : AE; folglich (5, 19. Zus.) DG : EB = GA : AE. Nun ist DG = FH; EB = HC; AE = GF; folglich FH : HC = AG : GF. Nun sind FH, HC denen AG, GF parallel, und die Triangel AGF, FHC nach einem Winkel F an einander gesetzt; folglich sind (6, 32. S.) AF, FC in Einer geraden Linie.

Zweyter Fall. Die ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelogramme KFHC, GFEA, haben die gleichen Scheitelwinkel KFH, EFG.

Da wieder AG, GF denen FH, HC parallel sind, auch AG : GF = FH : HC ist; so sind (6, 32. S.) AF, FC in Einer geraden Linie.

Der

Der 33. Satz.

Text: Lehrsatz. In gleichen Kreisen, ABC, DEF, verhalten sich sowohl die Winkel am Mittelpunkte, BGC, EHF, als auch die Winkel am Umkreise, BAC, EDF, wie die Bogen, auf welchen sie stehen, BC, EF; desgleichen die Kreisausschnitte, BGC, EHF.

Erster Theil. Nimm im Umkreise ABC eine beliebige Anzahl an einander hängender, dem Bogen BC gleicher, Bogen CK, KL, im Umkreise DEF wieder eine beliebige Anzahl stetig an einander liegender, dem Bogen EF gleicher, Bogen FM, MN, und ziehe GK, GL, HM, HN.

Da die Bogen BC, CK, KL einander gleich sind; so sind (3, 27. S.) die Winkel BGC, CGK, KGL gleich. Dasselbe Vielfache ist daher der Winkel BGL vom Winkel BGC, das der Bogen BL vom Bogen BC ist. Aus demselben Grunde ist der Winkel EHN vom Winkel EHF das nähmliche Vielfache, das der Bogen EN vom Bogen EF ist. Ist nun Bogen BL $\gtrless$ Bog. EN; so ist auch (3, 27. S.) BGL $\gtrless$ EHN. Nun sind hier vier Größen, nähmlich zwey Bogen BC, EF, zwey Winkel BGC, EHF vorhanden, und vom Bogen BC, vom Winkel BGC sind beliebige Gleichvielfache, als der Bogen BL und der Winkel BGL; vom Bogen EF, vom Winkel EHF aber andere beliebige Gleichvielfache, als der Bogen EN, der Winkel EHN, genommen worden; folglich (5, 5. E.) Bog. BC: Bog. EF = BGC: EHF. Aber (3, 20. S.) BGC = 2 BAC, und EHF = 2 EDF; daher (5, 15. S.) BGC: EHF = BAC: EDF. Folglich Bog. BC: Bog. EF = BGC: EHF = BAC: EDF.

Zweyter Theil. Ziehe im Kreise ABC die geraden Linien BC, CK, nimm in den Bogen BC, CK die Punkte O, P, ziehe BO, OC, CP, PK.

Da BG = GC, GC = GK, und BGC = CGK; so ist (1, 4. S.) BC = CK, und △ GBC = △ GCK. Da Bog. BC = Bog. CK, und der übrige Bogen, der den ganzen Umkreis ABC ergänzt, dem übrigen Bogen, der denselben Umkreis ergänzt, gleich ist; so ist (3, 27. S.) BOC = CPK; folglich ist 3, 11. E.) der Abschnitt BOC dem Abschnitte CPK ähnlich. Nun haben diese Abschnitte gleiche Grundlinien BC, CK; folglich ist (3, 24. S.) Abschnitt BOC = Abschn. CPK. Vorhin war △ BGC = △ CGK; folglich ist der Ausschnitt BGC = Ausschnitte CGK. Aus denselben Gründen ist der Ausschnitt KGL jedem der Ausschnitte BGC, CGK gleich. Auf ähnliche Art beweiset man, daß in dem Kreise DEF die Ausschnitte EHF, FHM, MHN gleich sind. So vielfach dem nach der Bogen BL vom Bogen BC ist, eben so vielfach ist der Ausschnitt BGL vom Ausschnitte BGC. Aus demselben Grunde ist der Ausschnitt EHN vom Ausschnitte EHF so vielfach, wie der Bog. EN vom Bog. EF. Daher, wenn Bog. BL ≷ Bog. EN, ist auch Ausschnitt BGL ≷ Ausschnitt EHN. Nun sind hier vier Größen, nähmlich zwey Bogen BC, EF, zwey Ausschnitte BGC, EHF vorhanden, und vom Bogen BC, dem Ausschnitte BGC sind beliebige Gleichvielfache, der Bogen BL, der Ausschnitt BGL; vom Bogen EF, dem Ausschnitte EHF aber andere beliebige Gleichvielfache, der Bogen EN, der Ausschnitt EHN, genommen; folglich Bog. BC : Bog. EF = Ausschnitt BGC : Ausschnitte EHF.

Note: Die Schlußworte des Satzes „als welche am Mittelpunkte stehen" haben wir, als einen müßigen Beysatz eines Unkundigen, weggelassen.

In den Griechischen Codices und der Lateinischen Version fehlen, in beyden Theilen des Beweises, die Worte ἃ ἔτυχε, beliebige; wir haben sie wieder in den Text gesetzt, worin sie nothwendig stehen müssen. Im Beweise des zweyten Theils muß im Grundtexte da,

wo

wo die Gleichheit der Triangel BGC, CGK bewiesen wird, das Wort ἄρα, folglich, wegbleiben.

Der B. Satz. Lehrsatz.

[Text zum Schlusse des 6. Buches.]

Wird (Fig. 52.) in einem Triangel, ABC, ein Winkel, A, von einer geraden Linie, AD, halbirt, die zugleich die gegenüber liegende Seite, BC, schneidet: so ist das unter den solchen Winkel einschließenden Seiten, BA, AC, enthaltene Rectangel dem Rectangel unter den Abschnitten, BD, DC, und dem Quadrate der halbirenden Linie, AD, zusammen gleich.

Zeichne (4, 5. S.) um den Triangel einen Kreis ACB, verlängere AD bis an den Umkreis in E, und ziehe EC.

Da BAD = CAE, und (3, 21. S.) ABD = AEC; so sind die Triangel ABD, AEC gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) BA : AD = EA : AC; daher (6, 16. S.) BA × AC = EA × AD das ist (2, 3. S.) = (ED × DA) + □ AD. Nun ist (3, 35. S.) ED × DA = BD × DC; also BA × AC = (BD × DC) + □ AD.

Der C. Satz. Lehrsatz.

[Text zum Schlusse des 6. Buches.]

Wird (Fig. 53.) in einem Triangel, ABC, aus der Spitze eines Winkels, A, auf die gegenüber liegende Seite, BC, ein Perpendikel, AD, gefället: so ist das unter den solchen Winkel einschließenden Seiten, BA, AC, enthaltene Rectangel dem Rectangel gleich, das unter dem Perpendikel, AD, und dem Durchmesser eines um den Triangel gezeichneten Kreises enthalten ist.

Zeichne

Zeichne (4, 5. S.) um den Triangel den Kreis ACB, ziehe dessen Durchmesser AE, und die EC.

Da BDA = R = (3, 31. S.) ECA, auch (3. 21. S.) ABD = AEC; so sind die Triangel ABD, AEC gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) BA : AD = EA : AC; daher (6, 16. S.) BA × AC = AD × EA.

*Der D. Satz. Lehrsatz.

[Text zum Schlusse des 6. Buchs.]

Das (Fig. 54.) unter den Diagonalen, AC, BD, einer vierseitigen Figur im Kreise, ABCD, enthaltene Rectangel ist den unter den gegenüber liegenden Seiten der vierseitigen Figur, AB, CD; AD, BC, enthaltenen Rectangeln zusammen gleich.

Mache (1, 23. S.) ABE = DBC; so ist, wenn zu beyden EBD hinzukommt, ABD = EBC. Nun ist (3, 21. S.) BDA = BCE; folglich der Triangel ABD dem Triangel BCE gleichwinklig. Folglich (6, 4. S.) BC : CE = BD : DA; folglich (6, 16. S.) BC × DA = CE × BD. Nun ist ABE = DBC, und (3, 21. S.) BAE = BDC; daher sind die Triangel ABE, BCD gleichwinklig. Folglich (6, 4. S.) BA : AE = BD : DC; daher (6, 16. S.) BA × DC = BD × AE. Vorhin war BC × DA = CE × BD; folglich BA × DC + BC × DA = BD × AE + CE × BD = (2, 1. S.) AC × BD.

Note: Diese drey Sätze haben wir, wegen des häufigen Gebrauchs, den die Geometer davon machen, dem 6. Buche angehängt.

Das eilfte Buch.

Erklärungen.

9. Text: Ein körperlicher Winkel wird von mehr als zwey ebenen Winkeln eingeschlossen, welche, ohne in einerley Ebene zu liegen, an einem Punkte zusammengestellt sind.

11. Text: Aehnliche Körper sind, deren körperliche Winkel, in der Ordnung wie sie auf einander folgen, gleich sind, und welche von gleich vielen, ähnlichen ebenen Figuren begrenzt werden.

Note: Unter Aehnlichkeit ebener Figuren verstehet man, Gleichheit ihrer Winkel und Proportionirtseyn ihrer, gleiche Winkel einschließenden, Seiten, weil man weder aus bloßer Gleichheit der Winkel, noch aus bloßer Proportionalität der Seiten, Triangel ausgenommen, auf Aehnlichkeit ebener Figuren schließen kann, und die ähnliche Lage der Seiten gegen einander, von welchen die Figuren eingeschlossen werden, gewisser Maßen von beyden Bestimmungen abhängt. Aus demselben Grunde sind ähnliche Körper diejenigen, welche gleiche körperliche Winkel haben, und von gleich vielen, ähnlichen Figuren begrenzt werden. Es gibt nähmlich auch Körper, welche nicht nur von gleich vielen, sondern sogar

auch

auch von gleichen, ähnlichen Ebenen begrenzt werden, und doch weder ähnlich noch gleich sind; wie sich aus dem Beweise hinter den Noten zu der 10. E. ergeben wird. Daher mußte die Erklärung von ähnlichen Körpern verbessert werden, und zu dem Ende ihr die Erklärung eines körperlichen Winkels vorangehen. Dieß und die 10. E. bezeugen genugsam, wie sehr diese Bücher von unberufenen Händen verderbt worden sind.

10. Text: Ist aus Gründen, die nun angegeben werden sollen, weggelassen worden.

Note: Der Sinn des Wortes, Gleich, æqualis, war vor dieser Erklärung bekannt; der Satz, welcher hier als die 10. E. aufgestellt ist, ist also ein Lehrsatz, den man nicht annehmen, sondern den man beweisen muß. Theon, oder ein anderer Herausgeber machte daraus, aus Auswissenheit, die Erklärung der gleichen und ähnlichen Körper. Die Aehnlichkeit der Körper muß aus der Erklärung von ähnlichen Körpern, ihre Gleichheit aber aus dem Grundsatze „Congruente Größen sind gleich", oder aus des 5. Buches Satz A, oder Satz 9, oder 14. Satze bewiesen werden; denn bey Beweisen für die Gleichheit der Figuren muß man doch auf diesen Grundsatz, oder auf einen der gedachten Sätze immer wieder zurückgehen. Euklides hat in keinem der vorhergehenden Bücher die Gleichheit der Figuren erklärt; gewiß, diese Erklärung hat er auch nicht gegeben. Was im dritten Buche als die erste Erklärung gegeben wird, ist unstreitig ein Lehrsatz, worin ausgesagt wird, daß Kreise von gleichen Halbmessern gleich sind; und dieß ist aus der Erklärung des Kreises klar. Sehr unschicklich versetzte Jemand diesen Lehrsatz unter die Erklärungen; denn man muß ja die Gleichheit der Figuren nicht erklären, sondern beweisen. Wenn es auch wahr wäre, daß Körper, welche von gleich vielen, ähnlichen und gleichen Ebenen eingeschlossen werden, gleich sind; so verdiente gleichwohl derjenige gerechten Tadel, der aus diesem Lehrsatze, für den der

Be-

Beweis erst noch geführt werden muß, eine Erklärung gemacht hätte. Wie aber, wenn der Satz falsch wäre? Müßte man alsdann nicht gestehen, daß sich die Geometer volle 1300 Jahre hindurch über diesen Elementar-Satz geirrt hätten? Dieß sollte uns billig bescheidener machen, und einsehen lehren, daß wir, bey der Eingeschränktheit unsers Denkvermögens, sogar in den Principien der Wissenschaft nicht vor Irrthümern sicher sind, die wir wegen ihrer Gewißheit mit Recht so hochschätzen. Es ließe sich an vielen Beyspielen zeigen, daß gedachter Satz nicht allgemein wahr sey; Folgendes ist indeß hinreichend.

Es sey (Fig. 55.) ABCD ein Quadrat, dessen Diagonalen AC, BD, sich in E schneiden. Auf der Diagonale BD, in der Ebene des Quadrates, zeichne den gleichschenkligen Triangel BFD; auf der Ebene ABCD errichte im Punkte E den Perpendikel EG, und ziehe von einem beliebigen Punkte desselben G die GA, GB, GC, GD, GF.

Hier ist in den Triangeln AEG, CEG, die AE = CE; EG gemein, und bey E sind rechte Winkel; folglich (1, 4. S.) AG = GC. Ferner ist in den Triangeln AGB, CGB, die AG = GC, GB gemein, und AB = BC; folglich (1, 8. S.) AGB = CGB, und daher (1, 4. S.) △ AGB = △ CGB. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß △ AGD = △ CGD sey.

Verlängere GE auf die entgegengesetzte Seite der Ebene ABCD, nimm darin einen beliebigen Punkt H, und ziehe HA, HB, HC, HD, HF; so läßt sich, wie vorhin, darthun, daß △ AHB = △ CHB, und △ AHD = △ CHD sey.

Auf diese Art hat man also zwey Körper erhalten, wovon jeder von acht Triangeln begrenzt wird: der Eine von denen acht Triangeln, wovon vier den gemeinschaftlichen Gipfel G und die Grundlinien AB, AD, BF, FD, die vier andern dieselben Grundlinien, aber den gemeinschaft-

schaftlichen Gipfel H haben; der Andere von denen acht Triangeln, wovon vier den Punkt G zum gemeinsamen Gipfel und die Grundlinien BC, CD, BF, FD, die vier übrigen dieselben Grundlinien, aber den gemeinsamen Gipfel H haben.

Nun ist vorher bewiesen, daß die vier Triangel AGB, AGD, AHB, AHD den vier Triangeln CGB, CGD, CHB, CHD, jeder für sich, gleich sind; aber die vier übrigen Triangel BGF, DGF, BHF, DHF sind beyden Körpern gemein: folglich werden diese zwey Körper von gleich vielen, ähnlichen und gleichen Ebenen begrenzt. Daß sie aber dessen ungeachtet ungleich sind, erhellet daraus, daß der erste in dem zweyten enthalten ist. Mithin ist es nicht immer wahr, daß von gleich vielen, ähnlichen und gleichen Ebenen begrenzte Körper gleich sind.

Zusatz. Daher können zwey ungleiche körperliche Winkel von gleich vielen gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen werden.

Denn der körperliche Winkel bey G, der von den vier ebenen Winkeln AGB, AGD, FGB, FGD, eingeschlossen wird, ist dem, an demselben Punkte G liegenden, aber von den vier ebenen Winkeln CGB, CGD, FGB, FGD eingeschlossenen, körperlichen Winkel nicht gleich, da dieser jenen einschließt. Der eine, wie der andere, wird von vier ebenen Winkeln eingeschlossen, die, wie bewiesen worden, einander, jeder für sich, gleich, oder dieselben Winkel sind. Es lassen sich unzählige ungleiche körperliche Winkel denken, die von gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen werden. Auch ist klar, daß die vorhin erwähnten Körper nicht ähnlich sind, da ihre körperlichen Winkel nicht alle gleich sind.

Aus folgenden drey Sätzen wird begreiflich, wie viele körperliche Winkel, ohne gleich zu seyn, von denselben, in einerley Ordnung zusammengestellten, ebenen Winkeln eingeschlossen werden können.

I. Satz.

I. Satz. Aufgabe. Es sind drey Größen, A, B, C, gegeben; man soll eine vierte finden, so daß jede drey zusammen größer als die übrige sind.

Es sey D solche vierte Größe; so ist $D < A+B+C$. Es sey A nicht kleiner, als B, C, und

Erstlich sey $B+C$ nicht $< A$; so ist $B+C+D > A$. Da A nicht $< B$; so ist $A+C+D > B$. Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß $A+B+D > C$. Folglich wird in dem Falle, wo $B+C$ nicht $< A$ ist, jede D, welche $< A+B+C$ ist, der Forderung Genüge leisten.

Zweytens sey $B+C < A$. Da verlangt wird, daß $B+C+D > A$ sey, so ist, wenn man B, C, auf beyden Seiten wegnimmt, $D > A-(B+C)$. Man nehme also eine beliebige Größe $D < A+B+C$, nur $> A-(B+C)$; so ist $B+C+D > A$; und, da $A > B$, C, so ist um so mehr $A+D+B > C$, oder $A+D+C > B$: und nach der Construction ist $A+B+C > D$.

Zusatz. Würde über dieß verlangt, daß $A+B$ nicht $< C+D$ seyn sollte; so darf $(A+B)-C$ nicht $< D$, das ist, D nicht $> (A+B)-C$ seyn.

II. Satz. Aufgabe. Es sind vier Größen A, B, C, D gegeben, von denen $A+B$ nicht kleiner als $C+D$ ist, und jede drey zusammen größer als die übrige vierte sind: man soll eine fünfte, E, finden, so daß jede zwey von den dreyen A, B, E zusammen größer, als die übrige dritte, auch daß jede zwey von den dreyen C, D, E zusammen größer als die übrige sind, wobey jedoch A nicht kleiner als B, und C nicht kleiner als D seyn darf.

Erstlich. Es sey $C-D$ nicht $< A-B$; so ist klar, daß sich eine Größe angeben läßt, welche $< C+D$, und $> C-D$ ist. Ist solche Größe E; so ist $E > A-B$; folglich $B+E > A$. Nun ist A nicht kleiner als B; folglich $A+E > B$. Nach dem Angenommenen aber

ist

ist $A+B$ nicht $<C+D$; hingegen $C+D>E$: daher ist $A+B>E$.

Zweytens. Es sey $A-B>C-D$. Da, nach dem Angenommenen, $B+C+D>A$; so ist $C+D>A-B$. Folglich läßt sich eine Größe angeben, welche $<C+D$ aber $>A-B$ ist. Solche Größe sey E. Da $E>A-B$, so ist $B+E>A$. Nun kann man, wie im vorigen Falle, zeigen, daß $A+E>B$, und $A+B>E$ sey. Mithin ist in beyden Fällen dargethan, daß jede zwey von den dreyen A, B, E, zusammen größer als die dritte sey.

Da übrigens in beyden Fällen $E>C-D$ ist; so ist $E+D>C$. Nach der Voraussetzung ist C nicht $<D$; folglich $E+C\geq D$; nach der Construction aber ist $C+D>E$. Folglich sind von den dreyen C, D, E, jede zwey zusammen größer als die übrige.

III. Satz. Lehrsatz. (Fig. 56a.) Vier ebene Winkel lassen sich, in einerley Ordnung, in unzählige, ungleiche körperliche Winkel zusammenstellen.

Nimm drey ebene Winkel A, B, C, von welchen A nicht kleiner als B, C ist, aber A, B zusammen kleiner als zwey rechte Winkel sind. Suche (I. S. u. Zus.) einen vierten Winkel D, so daß von den vier Winkeln A, B, C, D jede drey zusammen größer als der vierte, auch daß A, B zusammen nicht kleiner als C, D zusammen sind. Suche (II. S.) einen fünften Winkel E, so daß von den drey Winkeln A, B, E, jede zwey zusammen größer als der dritte, auch von den drey Winkeln C, D, E, jede zwey zusammen größer als der dritte sind.

Da $A+B<2\,R$, so ist $2(A+B)<4\,R$. Nun ist $A+B>E$; folglich $2(A+B)>A+B+E$; folglich $A+B+E<4\,R$. Nun sind von diesen drey Winkeln jede zwey größer als der übrige: folglich lassen sich (11. 23. S.) drey den ebenen Winkeln A, B, E, gleiche Winkel in einen körperlichen Winkel zusammenstellen. Solcher körperliche Winkel sey am Punkte F

aus

aus den ebenen Winkeln GFH = A, HFK = B, GFK = E zusammengestellt.

Da C + D nicht > A + B, so ist C + D nicht > A + B + E. Aber A + B + E < 4 R; folglich C + D + E < 4 R. Nun sind davon jede zwey größer als der übrige; folglich (11, 23. S.) läßt sich aus drey ebenen, den Winkeln C, D, E gleichen, Winkeln ein körperlicher Winkel construiren, und ein anderer, solchem Winkel gleicher, körperlicher Winkel (11, 26. S.) an den Punkt F der geraden Linie FG ansetzen. Es sey der Winkel GFK = E einer von den drey ebenen Winkeln, die diesen Winkel einschließen, die beyden übrigen seyen KFL = C, GFL = D. Folglich ist an den Punkt F ein körperlicher Winkel, aus den vier ebenen Winkeln GFH = A, HFK = B, KFL = C, GFL = D, angesetzt worden.

Suche (Fig. 56b.) wieder einen Winkel M, so daß von den drey Winkeln A, B, M, jede zwey zusammen größer als der dritte, auch von den drey Winkeln C, D, M jede zwey zusammen größer als der dritte sind. Hier läßt sich, wie im Vorigen, zeigen, daß sowohl A + B + M, als auch C + D + M kleiner als zwey rechte Winkel ist. Construire also (11, 23. S.) an N einen, von den ebenen Winkeln ONP = A, PNQ = B, ONQ = M eingeschlossenen, körperlichen Winkel, auch an demselben Punkte in der geraden Linie ON (11, 26. S.) noch einen körperlichen Winkel, von dessen ebenen, ihn einschließenden, Winkeln der eine ONQ = M, und die beyden übrigen QNR = C, ONR = D seyen. Dadurch entstehet am Punkte N ein körperlicher Winkel, der von den ebenen Winkeln ONP = A, PNQ = B, QNR = C, ONR = D gebildet wird. Daß aber die körperlichen Winkel, welche an F, N aus den gedachten vier ebenen Winkeln zusammengesetzt sind, sich nicht gleich, oder congruent, seyn können, erhellet daraus, daß die Winkel GFK, ONQ, oder E, M, nach der Construction ungleich sind, weßhalb die geraden Linien GF, FK, den geraden Linien ON, NQ, nicht congruent

gruent seyn können. Folglich können dieß auch die körperlichen Winkel nicht seyn, die daher ungleich sind.

Da sich nun aus den gegebenen Winkeln A, B, C unzählige Winkel, die mit dem Winkel D auf dasselbe Resultat führen, auch aus A, B, C, D wieder andere finden lassen, welche derselben Absicht, wie E oder M, entsprechen: so folgt, daß unzählige, ungleiche körperliche Winkel aus denselben vier ebenen Winkeln construirt werden können.

Clavius und andere Geometer irren also, wenn sie behaupten, daß von gleich vielen gleichen ebenen Winkeln eingeschlossene körperliche Winkel gleich seyen. Es erhellet auch, daß 11, 26. S. nicht streng bewiesen worden; denn darin wird angenommen, daß körperliche Winkel, welche von drey gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen werden, gleich sind; bewiesen aber wird es nicht.

Der I. Satz.

Text: Wenn es möglich, so sey von ABC der Theil AB in, der Theil BC über der Ebene. Verlängert man nun AB nach D; so hätten die geraden Linien ABC, ABD das Stück AB gemein; welches (Simf. T. 1, 11. Zuf.) unmöglich ist.

Note: Die Worte am Ende: „Denn zwey gerade „Linien können nur in Einem Punkte zusammentreffen, „oder fallen ganz zusammen." haben wir, als eines Unkundigen Beysatz, ausgelassen; denn dieß mußte bewiesen, nicht angenommen werden.

* Text: Wenn's möglich, so sey AB, ein Stück der geraden Linie ABC, in der Ebene, und das Stück BC über derselben. Da AB in der Ebene ist, so kann sie in derselben verlängert werden. Sie sey bis D verlängert. Lege durch AD eine Ebene und drehe sie um, bis sie durch den Punkt C gehet. Da die Punkte B, C in dieser Ebene sind, so ist auch die gerade

rade Linie BC darin. Folglich sind zwey gerade Linien ABC, ABD in einerley Ebene, welche den Abschnitt AB gemein haben, welches unmöglich ist.

*) Note: Thomas Simpson führt unsere obige Note in den Seinigen, am Ende der zweyten Ausgabe seiner Elements of Geometry S. 262 an und setzt hinzu: „Wie kann es ein Beweis von fehlerhafter Methode „seyn, wenn ein Geometer (er meynt Euklides oder „Theon) auf einen Grundsatz verweiset, den Euklides „selbst aufgestellt hat, im 14. S. vor dem 1. Buche. „(er meynt Barrow's Euklides; im Griechischen ist es „der 18. S.) und nicht darthut, was Niemand beweisen kann?" Alles aber, was im vorliegenden Falle aus diesem Grundsatze folgen kann, ist, daß, wenn zwey gerade Linien einander in zwey Punkten treffen könnten, die zwischen solchen Punkten liegenden Stücke derselben zusammenfallen müßten, die Linien also das zwischen diesen Punkten liegende Stück gemein hätten.

Nun, da es im Euklides nicht gezeigt worden, daß sie keinen Abschnitt gemein haben können, so beweiset dieß nicht, daß sie sich nicht in zwey Punkten treffen können, woraus im Griechischen geschlossen wird, daß sie keinen Abschnitt gemein haben; im Gegentheil, weil sie keinen Abschnitt gemein haben können, wie wir im 1, 11. Zus. der Quartausgabe bewiesen haben, so folgt klar, daß sie nicht in zwey Punkten zusammentreffen können, wovon Thomas Simpson oben vorgab, daß es Niemand beweisen könne.

In denselben Noten, Seite 265, bemerkt Herr Simpson richtig, daß im 1, 11. Zus. der Quartausgabe angenommen wurde, die geraden Linien AB, BD, BC seyen in Einer Ebene, dieß aber lasse sich in 11, 1. S. nicht voraussetzen. Bald nach der Bekanntmachung der Quartausgabe bemerkte und verbesserte ich es, wie es sich jetzt in dieser [der Englischen] Ausgabe findet. Er irrte darin, daß er den von ihm erwähnten 10. Grundsatz für

einen

einen Euklidischen nahm; von Euklides ist er aber nicht, sondern ist der 10. in Barrow's Ausgabe, der ihn aus Herigon's Cursus hat; statt seiner wurde der Zusatz zum 1, 11. S. hinzugesetzt.

Der 2. Satz.

Text: Lehrsatz. Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, auch jede drey gerade Linien, EC, CB, BE, die einander treffen, liegen in Einer Ebene.

Durch die gerade Linie EB sey eine Ebene gelegt, und drehe sich um EB so weit herum, bis sie durch den Punkt C gehet. Da also die Punkte E, C in solcher Ebene sind, so ist (1, 7. E.) in derselben auch die gerade Linie EC. Aus gleichen Gründen ist in derselben auch die BC. Nun war darin, nach der Construction, die EB. Folglich sind die drey geraden Linien EC, CB, BE, in einerley Ebene. In der Ebene aber, worin EC, EB sind, sind (11, 1. S.) auch die CD, AB; folglich sind die geraden Linien AB, CD in einerley Ebene.

Note: Wir halten diesen Satz für verfälscht. Denn der zweyte Theil seiner Aussage, daß nähmlich jeder Triangel in Einer Ebene liege, bedarf gar keines Beweises; alle im ersten Buche der Elemente erklärten Figuren sind ja nach der Voraussetzung ebene Figuren, das ist, in einer Ebene construirt, und dahin gehören die Triangel auch. Ueber dieß kann eine erhabene Fläche von drey sich treffenden, geraden Linien begrenzt werden. Der Beweis, daß zwey einander schneidende Linien in Einer Ebene sind, ist auch nicht befriedigend; es muß dargethan werden, daß zwey oder drey einander treffende gerade Linien in Einer Ebene sind. Deßwegen haben wir Satz und Beweis in diejenigen umgeändert, welche sich in unserm Texte finden.

Der

Der 3. Satz.

Note: Im Grundtexte heißt es gegen das Ende des Beweises: „Folglich sind DEB, DFB nicht gerade „Linien, und aus gleichen Gründen auch keine andere „von D nach B gezogene Linie.“ Wir haben dieß ausgelassen. Denn daraus, daß zwey Linien einen Raum einschließen, folgt nur, daß die eine davon keine gerade Linie sey. Das Beweisende aber liegt darin, daß, wenn der Durchschnitt beyder Ebenen keine gerade Linie wäre, alsdann zwey gerade Linien einen Raum einschließen würden; und dieß ist ungereimt. Folglich ist beyder Ebenen Durchschnitt eine gerade Linie.

Der 4. Satz.

Note: „Und der $\triangle AED = \triangle BEC$.“ Dieß haben wir ebenfalls ausgelassen. Dieser Schluß ist schon in den vorigen Büchern so häufig vollständig wiederhohlt worden, daß es in diesem Buche nicht weiter nöthig ist.

Der 5. Satz.

Note: Im Grundtexte muß nahe am Ende des Beweises das Wort ἐπιπέδω durchgestrichen werden; es ist ein müßiger Beysatz eines Nichtgeometers. In der Oxforder Ausgabe der Commandinischen Version ist auch mit Recht „plano“ ausgelassen. [Man muß also lesen: Demnach ist die Linie BC nicht über der Ebene, non est in sublimi; folglich die drey BC, BD, BE in Einer Ebene.]

Der 7. Satz.

Text: Wäre dieß nicht; so sey eine, die Punkte E, F verbindende, Linie über der Ebene, wie EGF.

In der Ebene der Parallellinien ABCD ziehe vom Punkte E nach F die gerade Linie EHF. [Man schreibe noch in der Figur der deutschen Ueberſ. zwiſchen E, F den Buchſtaben H an die Linie EF.] Nun war angenommen, EGF ſey eine gerade Linie; folglich ſchlöſſen die geraden Linien EHF, EGF einen Raum ein; welches (1, 12. S.) nicht möglich iſt. Folglich iſt auch eine von E nach F gezogene gerade Linie nicht über, ſondern in der durch die Parallellinien AB, CD gelegten Ebene.

Note: Offenbar iſt dieſer Satz der Zuſatz eines der Geometrie nur wenig kundigen Mannes. In den vorhergehenden Büchern wird überall angenommen, daß von einem Punkte zum andern, in jeder Ebene, gezogene gerade Linien in ſolcher Ebene ſind. Wäre dieß nicht, ſo würden einige Beweiſe, in welchen angenommen wird, daß eine gerade Linie eine andere treffe, nicht bündig ſeyn; denn die geraden Linien träfen nicht zuſammen. So würde zum Beyſpiel im 30. S. des 1. B. die gerade Linie GK die EF nicht treffen, wenn GK mit den Parallellinien AB, CD nicht in einerley Ebene wäre, in welcher, nach dem Angenommenen, auch die EF iſt. Außer dem wird der 7. Satz mittelſt des vorhergehenden dritten bewieſen, worin gerade das, was im 7. S. bewieſen werden ſoll, daß nähmlich eine gerade Linie von einem Punkte zum andern in beliebiger Ebene gezogen in derſelben Ebene ſey, zwey Mahle angenommen wird. Daſſelbe wird im vorſtehenden 6. S. angenommen; denn die gerade Linie BD, welche in der Ebene BDE die Punkte B, D verbindet, wird als in ſolcher Ebene befindlich gedacht. Wir haben dem 7. S. ſeine Stelle zwar gelaſſen, um die Anzahl der Sätze beyzubehalten; aber den Beweis haben wir geändert. Dieſer Satz würde, ſtände er auch nicht in den Elementen, aus 1, 7. E. und 35. S. einleuchten.

Der 8. Satz.

Text: [Nach den Worten in der deutschen Uebersetzung: Folglich (11, 4. S.) nähmlich ED, auch auf der Ebene durch DB, DA.] Aber in der Ebene durch BD, DA ist DC; denn alle drey sind mit den Parallellinien AB, CD in einerley Ebene. Daher ist ED auf CD perpendikular, mithin auch CD auf DE. Aber auch CD auf DB; folglich ist CD auf DE, DB in deren Durchschnittspunkte D perpendikular; folglich (11, 4. S.) auf der Ebene durch DE, DB. Nun ist auf solcher Ebene die AB perpendikular; folglich ist CD mit AB auf einerley Ebene perpendikular.

Note: Gegen das Ende des Beweises haben der Grundtext, und die Versionen Commandini's und Gregory's: „Aber in der Ebene durch BA, AD ist die DC." Statt dessen liest die Oxforder Ausgabe der Commandinischen Version richtiger: „Aber in der Ebene durch BD, DA ist die DC." Unmittelbar darauf lesen alle Ausgaben: „Weil in der Ebene durch BD, DA die AB, BD „sind; in der Ebene aber, worin AB, BD sind, ist auch „die DC." Diese Stelle ist corrumpirt, oder von Jemand eingeschoben worden. Denn es war gar nicht nöthig, auf diesem Umwege zu zeigen, daß DC mit DB, DA in einerley Ebene sey; aus dem vorstehenden 7. S. folgt unmittelbar, daß die geraden Linien BD, DA in der Ebene der Parallellinien AB, CD sind. Man muß daher, mit Weglassung jener Stelle, lesen: „Denn „alle drey sind mit den Parallellinien AB, CD in einer„ley Ebene."

Der 15. Satz.

Note: Nach den Worten im Beweise: „Nun ist (1, 30. S.) AB der GH parallel" muß eingeschaltet werden: „Denn beyde sind der DE, mit welcher sie

„nicht in einerley Ebene (11, 9. S.) liegen, parallel.“; dieß ist offenbar ausgelassen worden.

Der 16. Satz.

Text: Wären EF, GH nicht parallel, so müßten sie, genugsam verlängert, entweder auf der Seite von FH, oder auf der Seite von EG, zusammentreffen. Dieß geschehe zuerst auf der Seite FH in I, u. s. w. [in der deutschen Uebersetzung.] Auf ähnliche Weise wird bewiesen, daß EF, GH auch nicht auf der Seite von EG zusammenlaufen können. Nun sind gerade Linien, welche in einerley Ebene genugsam verlängert an keiner Seite zusammentreffen, parallel. Folglich sind EF, GH parallel.

Note: Im Grundtexte heißt es gegen das Ende des Beweises: „Nun sind gerade Linien, welche, genug„sam verlängert, an keiner Seite zusammentreffen, pa„rallel.“ Hier muß man aber lesen: „Nun sind gerade „Linien, welche in einerley Ebene ꝛc.“. Im Beweise des 1, 17. S. hatten wir diese Erklärung ohne den Zusatz „in einerley Ebene“ benutzt, weil alle geraden Linien, von denen in den vorhergehenden Büchern gehandelt wird, in Einer Ebene angenommen werden; hier aber war dieser Zusatz nöthig.

Der 20. Satz.

Text: Sind BAC, CAD, DAB, gleich; so ist von selbst klar, daß jede zwey zusammen größer als der dritte sind. Sind sie aber ungleich; so sey BAC nicht kleiner, als ein beliebiger Winkel von den übrigen, aber größer als DAB. An den Punkt A der AB, in der Ebene durch BA, AC, trage den Winkel BAE = DAB; mache AE = AD; ziehe durch E die BEC, welche die gera-

geraden Linien AB, AC in den Punkten B, C schneide, und ziehe DB, DC.

Da DA=AE, und AB gemein, auch DAB=BAE; so ist (1, 4. S.) DB=BE. Nun ist (1, 20. S.) BD+DC>CB, das ist, >BE+EC; aber BD=BE; folglich DC>EC. Da DA=AE, aber AC gemein, und DC>EC; so ist (1, 25. S.) DAC>EAC. Nun ist nach der Construction DAB=BAE; folglich DAB+DAC>BAC. Nun ist BAC nicht kleiner als ein beliebiger Winkel von den übrigen DAB, DAC; folglich ist BAC mit jedem der beyden übrigen zusammen größer als der dritte.

Note: Der Grundtext lieset: „Sind sie aber ungleich; so sey BAC größer." Aber BAC kann auch einem von den übrigen gleich seyn. Daher muß man lesen: „Sind sie aber ungleich; so sey BAC nicht kleiner „als ein beliebiger Winkel von den übrigen, größer aber „als DAB."

Am Ende heißt es: „Folglich ist DAB+DAC> „BAC. Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, daß jede „zwey andere zusammen größer als der übrige sind." Dazu ist weiter kein Beweis nöthig; denn, weil BAC nicht kleiner als ein beliebiger Winkel von den übrigen ist, so erhellet, daß BAC mit jedem der beyden übrigen zusammen größer als der dritte sey.

Der 21. Satz.

Text: Erstlich. Der körperliche Winkel bey A sey von drey ebenen Winkeln BAC, CAD, DAB eingeschlossen. [Wie im Grundtexte.]

Zweytens. (Fig. 57.) Der körperliche Winkel bey A sey von beliebig vielen ebenen Winkeln BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, eingeschlossen.

Schneide die Ebenen aller Winkel mit einer Ebene, und dieß gebe die Durchschnittslinien BC, CD, DE, EF, FB.

FB. Da der körperliche Winkel bey B von den drey ebenen Winkeln CBA, ABF, FBC eingeschlossen wird; so ist (11, 20. S.) CBA + ABF > FBC. Aus gleichen Gründen sind, für die körperlichen Winkel bey C, D, E, F, von den ebenen Winkeln, welche an den Grundlinien der Triangel, deren gemeinschaftliche Spitze A ist, anliegen, jede zwey zusammen größer, als der dritte, mit ihnen an demselben Punkte liegende und in das Polygon BCDEF gehörige Winkel. Folglich sind die an den Grundlinien gedachter Triangel liegende Winkel zusammen größer, als die Winkel des Polygons zusammen. Nun sind die Winkel dieser Triangel zusammen zwey Mahl so vielen rechten Winkeln gleich, als Triangel vorhanden sind, das ist, als das Polygon Seiten hat; aber alle Winkel des Polygons zusammen (1, 32. Zus.), wenn dazu noch vier rechte Winkel kommen, betragen doppelt so viele rechte, als das Polygon Seiten hat: folglich sind die Winkel in den Triangeln zusammen den Winkeln des Polygons nebst vier rechten gleich. Nun waren nach dem Obigen die Winkel an den Grundlinien der Triangel zusammen größer als des Polygons Winkel zusammen: daher sind der Triangel übrige Winkel, von welchen nähmlich der körperliche Winkel bey A eingeschlossen wird, zusammen kleiner als vier rechte.

Der 22. Satz.

Note: Im Anfange [des andern Beweises, den Simson allein von beyden Beweisen aufgenommen hat] lieset der Grundtext: „Sind die drey ebenen Winkel bey B, „E, H ungleich: so sey der Winkel bey B größer als jeder „der andern bey E, H." Diese Lesearт ist offenbar corrumpirt; denn B kann ja auch einem der übrigen gleich seyn. Man sollte daher lesen: „Sind die drey ebenen Winkel „bey B, E, H ungleich; so sey B nicht kleiner als jeder

„der

„der übrigen bey E, H: folglich ist auch AC nicht kleiner „als jede der übrigen DF, GI.“

Der 23. Satz.

Text: Aufgabe. (Fig. 58.) Drey gegebene ebene Winkel, ABC, DEF, GHK, welche zusammen kleiner als vier rechte, und von welchen jede zwey zusammen größer als der dritte sind, in einen körperlichen Winkel zusammen zustellen.

Mache AB, BC, DE, EF, GH, HK gleich, und ziehe AC, DF, GK; so läßt sich (11, 22. S.) aus den drey letzten Linien ein Triangel construiren. Er sey LMN, und darin LM = AC, MN = DF, NL = GK. Zeichne um denselben (4, 5. S.) einen Kreis LMN, dessen Mittelpunkt X entweder innerhalb des Triangels LMN, oder auf eine seiner Seiten, oder außerhalb desselben fällt.

Erster Fall. (Fig. 58a.) Es liege X innerhalb des Triangels LMN. Ziehet man LX, MX, NX; so soll AB > LX seyn.

Wäre dieß nicht; so ist AB entweder = oder < LX. Es sey zuerst AB = LX. Da AB = LX, auch AB = BC, LX = XM, auch AC = LM; so ist (1, 8. S.) ABC = LXM. Aus gleichem Grunde ist DEF = MXN; GHK = NXL. Folglich ist ABC + DEF + GHK = LXM + MXN + NXL. Aber (1, 15. Zus.) LXM + MXN + NXL = 4R; also auch ABC + DEF + GHK = 4R, welches der Voraussetzung ABC + DEF + GHK < 4R widerspricht. Aber zweytens, AB ist auch nicht < LX. Gesetzt sie wäre < LX; so (1, 22. S.) construire auf LM, auf der Seite des Mittelpunktes X, den Triangel LOM, worin LO = AB, OM = BC sey. Da nun auch LM = AC; so ist (1, 8. S.) LOM = ABC. Nun war angenommen, daß AB, das ist LO, kleiner als LX sey. Folglich fallen LO, MO innerhalb des

Tri-

Triangels LXM. Denn fielen sie mit LX, XM, zusammen, oder außerhalb des gedachten Triangels; so wären sie (1, 21. S.) entweder denen LX, XM gleich, oder größer, als diese. Daher ist LXM, das ist ABC, > LXM. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß DEF > MXN, und GHK > NXL sey. Folglich ist ABC + DEF + GHK > LXM + MXN + NXL, das ist, > 4R; welches dem Angenommenen widerspricht. Folglich kann AB nicht < LX seyn. Nun war AB nicht = LX; folglich ist AB > LX.

Zweyter Fall. (Fig. 58b.). Des Kreises Mittelpunkt X liege auf einer Seite des Triangels LMN, etwa auf der MN. Ziehe XL.

Wäre hier AB nicht > LX; so müßte wieder AB entweder = oder < LX seyn. Unter jener Voraussetzung wäre AB + BC, das ist DE + EF, = MX + XL, das ist MN. Aber MN = DF; folglich DE + EF = DF; welches (1, 20. S.) unmöglich ist. Also ist auch AB nicht = LX. Unter dieser würde man auf den Widerspruch DE + EF < DF gerathen. Nothwendig ist also auch hier AB > LX.

Dritter Fall. (Fig. 58c.) Der Mittelpunkt X liege außerhalb des Triangels LMN. Ziehe LX, MX, NX.

Wäre nun AB nicht > LX, so sey AB = LX. Dann würde, wie im ersten Falle, sich darthun lassen, daß ABC = MXL, GHK = LXN, und folglich MXN = ABC + GHK wäre. Nun ist ABC + GHK > DEF; folglich MXN > DEF. Da aber DE = MX, EF = XN, DF = MN; so ist (1, 8. S.) MXN = DEF; welches dem Vorigen widerspricht. Folglich kann AB nicht = LX seyn.

Wäre hingegen AB < LX; so würde, wie im ersten Falle, folgen, daß ABC > MXL, GHK > LXN. Trage an den Punkt B der BC den Winkel CBP = GHK, mache BP = HK, und ziehe CP, AP. Da CB = GH;

so

so ist (1, 4. S.) CP = GK = LN. Nun war ABC > MXL; folglich ist in den gleichschenkligen Triangeln ABC, MXL der Winkel an der Grundlinie MLX > Winkel an der Grundlinie ACB. Aus gleichen Gründen ist, weil GHK, das ist CBP, > LXN, auch XLN > BCP. Folglich MLN > ACP. Nun ist ML = AC, LN = CP; also (1, 24. S.) MN > AP. Aber MN = DF; also DF > AP. Nun ist DE = AB, EF = BP; folglich (1, 25. S.) DEF > ABP. Aber ABP = ABC + CBP = ABC + GHK; folglich DEF > ABC + GHK. Nun ist, nach dem Angenommenen, DEF < ABC + GHK; welches dem Vorigen widerspricht. Folglich ist AB nicht < LX. Aber AB war auch nicht = LX; folglich ist nothwendig AB > LX.

[Die Construction des körperlichen Winkels wie im Grundtexte.]

Note: Bey dem dritten Falle haben wir ausgelassen, was schon beym ersten erwiesen wurde, auch die Construction gebraucht, welche Campanus gab, der jedoch den zweyten und dritten Fall nicht beweiset; hierdurch wurde der Beweis etwas kürzer. Uebrigens haben wir Construction und Beweis des dritten Falles etwas einfacher, als im Grundtexte, gemacht.

Der A. Satz. Lehrsatz.

[Text hinter dem 23. Satze.]

Werden (Fig. 59.) zwey körperliche Winkel, A, B, von drey gleichen ebenen Winkeln, CAD = FBG, CAE = FBH, EAD = HBG, eingeschlossen: so haben die Ebenen, worin die gleichen Winkel sind, ähnliche Neigungen.

Nimm in der geraden Linie AC einen willkührlichen Punkt K, errichte in demselben auf AC in der Ebene CAD den Perpendikel KD, in der Ebene CAE aber den Perpendikel KL; so ist (11, 6. E.) der Winkel DKL

die

die Neigung der Ebene CAD gegen die Ebene CAE. Schneide von BF ein Stück BM = AK ab, errichte in M auf BF die Perpendikel MG, MN, jenen in der Ebene FBG, diesen in der Ebene FBH; so ist (11, 6. S.) der Winkel GMN die Neigung der Ebene FBG gegen die Ebene FBH. Ziehe LD, NG.

Da in den Triangeln KAD, MBG, die AK = BM, KAD = MBG, AKD = R = BMG; so ist (1, 26. S.) KD = MG, und AD = BG. Aus gleichem Grunde ist in den Triangeln KAL, MBN die KL = MN, und AL = BN. Da also in den Triangeln LAD, NBG die LA = NB, AD = BG, auch, nach der Voraussetzung, EAD = HBG ist; so ist (1, 4. S.) LD = NG. Ferner ist in den Triangeln KLD, MNG, die DK = GM, KL = MN, LD = NG; folglich (1, 8. S.) DKL = GMN, das ist, die Ebenen CAD, CAE, und FBG, FBH, haben ähnliche Neigungen. Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, daß auch die übrigen Ebenen, in welchen gleiche Winkel sind, nähmlich CAD, EAD, und FBG, HBG; wieder CAE, EAD, und FBH, HBG ähnliche Neigungen haben.

Der B. Satz Lehrsatz.

[Text hinter dem 23. Satze.]

Wenn von den drey ebenen Winkeln, (Fig. 59.) welche zwey körperliche Winkel bey A, B, einschließen, die ähnlich liegenden gleich sind: so sind die körperlichen Winkel gleich.

Lege den körperlichen Winkel bey A in den bey B, den ebenen Winkel CAD auf FBG, daß der Punkt A auf B, die gerade Linie AC längs der BF falle; so fällt, weil CAD = FBG angenommen worden, die AD längs der BG. Nun ist (11, A. S.) die Neigung der Ebene CAE gegen die Ebene CAD der Neigung der Ebene FBH

gegen

gegen die Ebene FBG gleich; folglich fällt die Ebene CAE mit der Ebene FBH zusammen, weil die Ebenen CAD, FBG zusammenfallen: und weil die geraden Linien AC, BF auf einander fallen, auch CAE = FBH, so fällt AE auf BH, AD auf BG; weßhalb die Ebene EAD mit der Ebene HBG zusammenfällt. Daher sind die körperlichen Winkel bey A, B congruent, folglich (1, 8. S.) gleich.

Der C. Satz. Lehrsatz.

[Text nach dem 23. Satze.]

Körper, (Fig. 60) AG, KQ, welche von gleich vielen, gleichen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ebenen begrenzt werden, und an welchen jeder körperliche Winkel von nicht mehr als drey ebenen Winkeln eingeschlossen wird, sind gleich und ähnlich.

Es seyen also an den Körpern AG, KQ die sie begrenzenden Ebenen AC, KM; AF, KP; BG, LQ; GD, QN; DE, NO; FH, PR gleich und ähnlich.

Da der körperliche Winkel bey A von den drey ebenen Winkeln BAD, BAE, EAD eingeschlossen wird, welche, nach der Voraussetzung, jeder für sich, denen drey ebenen Winkeln LKN, LKO, OKN, welche den körperlichen Winkel bey K einschließen, gleich sind: so ist (11, B. S.) A = K. Auf ähnliche Art wird die Gleichheit der übrigen körperlichen Winkel bewiesen. Bringt man also den Körper AG in den Körper KQ, und legt die Ebene AC so auf die Ebene KM, daß AB auf KL fällt; so werden gedachte beyde Ebenen, weil sie gleich und ähnlich sind, einander decken. Folglich decken die geraden Linien AD, KN; DC, MN; CB, ML einander, und die Punkte A, K; D, N; C, M; B, L fallen zusammen. Aber der körperliche Winkel bey A ist dem bey K congruent; folglich decken die Ebenen AF, KP,

und

und die Figuren AF, KP einander, weil sie gleich und ähnlich sind. Daher decken einander die geraden Linien AE, KO; EF, OP; FB, PL, und die Punkte E, O; F, P fallen zusammen. Auf ähnliche Art schließt man, daß die Figur AH die Figur KR, die gerade Linie DH die NR decke, und der Punkt H auf R falle. Da der körperliche Winkel bey B dem bey L gleich ist; so folgt in ähnlicher Schlußreihe, daß die Figur BG der LQ, die gerade Linie CG der MQ congruent sey, und daß der Punkt G mit Q zusammenfalle. Da also die Ebenen und Seiten des Körpers AG denen Ebenen und Seiten des Körpers KQ congruent sind; so ist AG dem KQ gleich und ähnlich.

Auf ähnliche Art beweiset man die Gleichheit und Aehnlichkeit aller andern Körper, an welchen jeder körperliche Winkel von nicht mehr als drey ebenen Winkeln eingeschlossen wird, und welche von gleich vielen, gleichen, ähnlichen - und ähnlich liegenden Flächen begrenzt werden.

Der 24. Satz.

Text: Lehrsatz. Wird ein Körper, CDGH, von sechs parallelen Ebenen begrenzt; so sind die einander gegenüber liegenden Ebenen ähnliche und gleiche Parallelogramme.

Note: Am Ende der Aussage des Satzes haben wir das Wort „ähnliche" zugesetzt; weil die Ebenen der Körper, deren Gleichheit im folgenden 25. S. bewiesen werden wird, ähnlich und gleich seyn müssen, damit die Gleichheit dieser Körper aus dem Satze C. des 11. Buches geschlossen werden könne. In der Oxforder Ausgabe von Commandini's Version wird in einem Zusatze die Aehnlichkeit der hier gedachten Parallelogramme bewiesen,

um die Gleichheit der Körper im 25. Satze aus 11, 10. E. herleiten zu können.

Der 25. Satz.

Text: Lehrsatz. Wird ein Parallelepipedon, ABCD, von einer Ebene, EF, den einander gegenüber liegenden Ebenen, AH, DL, parallel geschnitten; so verhalten sich die abgeschnittenen Körper, AK, ID, wie ihre Grundflächen, AE, IC.

Verlängere AL auf beyden Seiten; nimm beliebig viele Abschnitte in derselben, LP, PQ der IL, und wieder beliebig viele Abschnitte, AN, NO der IA gleich; vollende die Parallelogramme OR, RA, CP, YQ, und die Körper OV, NH, LX, PZ.

Da die geraden Linien ON, NA, AI gleich sind; so sind (1, 36. S.) die Parallelogramme OR, RA, AE gleich. Ferner sind die Parallelogramme SR, RH, HE, und (11, 24. S.) die Parallelogramme OS, NV, AH gleich.

Aus gleichen Gründen sind die Parallelogramme IC, CP, YQ; die Parallelogramme CK, CX, YZ; die Parallelogramme LD, PX, QZ gleich.

Folglich sind drey Ebenen des Körpers OV dreyen Ebenen des Körpers NH, so wie auch dreyen Ebenen des Körpers AK gleich und ähnlich. Aber auch die drey, diesen, dreyen gegenüber liegenden Ebenen sind an gedachten Körpern gleich und ähnlich, und keiner ihrer körperlichen Winkel wird von mehr als drey ebenen Winkeln eingeschlossen. Folglich (11, C. S.) sind die drey Körper OV, NH, AK gleich. Aus gleichen Gründen sind aber auch die drey Körper ID, LX, PZ gleich. Folglich ist der Körper OK von dem Körper AK dasselbe Vielfache, das die Grundfläche OE von der Grundfläche AE ist. Aus demselben Grunde ist der Körper KQ von dem Kör-

per

per ID das nähmliche Vielfache, das die Grundfläche EQ von der Grundfläche IC ist. Nun ist, wenn OE ≷ EQ, auch (11, C. S.) OK ≷ KQ. Folglich (5, 5. E.) AK:ID = AE:IC.

Note: Im Beweise des 25. Satzes wird die Gleichheit zweyer Körper, welche von ähnlichen und gleichen Ebenen, in gleicher Anzahl, begrenzt werden, angenommen. Theon, oder ein Anderer scheint, um sich die Mühe eines Beweises für die Gleichheit der im vorliegenden Satze erwähnten Körper zu ersparen, die 10. Erklärung dieses Buchs für einen Beweis eingeschoben zu haben; und das that er doch wohl aus Unwissenheit!

Der 26. Satz.

Text: Aufgabe. (Fig. 61.) An eine gegebene gerade Linie, AB, an einen in derselben gegebenen Punkt, A, einen, dem gegebenen, von drey ebenen Winkeln, EDC, EDF, FDC, eingeschlossenen körperlichen Winkel, D, gleichen, körperlichen Winkel zu stellen.

Nimm in der geraden Linie DF einen beliebigen Punkt F; fälle aus demselben (11, 11. S.) auf die durch ED, DC gehende Ebene den Perpendikel FG, der die gedachte Ebene in dem Punkte F treffe; ziehe DG; trage (1, 23. S.) an den Punkt A der geraden Linie AB den Winkel BAL = EDC, und BAK = EDG; mache AK = DG; errichte (11, 12. S.) im Punkte K auf der Ebene BAL den Perpendikel KH, mache diesen der GF gleich, und ziehe AH: so ist der von den ebenen Winkeln BAL, BAH, HAL eingeschlossene, körperliche Winkel bey A dem gegebenen bey D gleich.

Noch mache die AB = DE, und ziehe HB, KB, FE, GE. Da FG auf der untern Ebene perpendikular ist; so sind (11, 3. E.) FGD, FGE rechte Winkel.

Nun

Nun sind KA, AB denen GD, DE, jede für sich, gleich, und schließen gleiche Winkel ein; folglich ist (1, 4. S.) BK = EG. Aber es ist auch KH = GF, und beyde schließen mit KB, GE rechte Winkel ein; folglich ist (1, 4. S.) HB = FE. Ferner sind die AK, KH denen DG, GF, jede für sich, gleich, und schließen rechte Winkel ein; folglich ist AH = DF. Nun ist AB = DE; folglich sind die HA, AB denen FD, DE, jede für sich, gleich, und HB = FE; folglich (1, 8. S.) BAH = EDF. Aus gleichem Grunde ist auch HAL = FDC.

Denn macht man AL, DC gleich, und ziehet KL, HL, GC, FC; so ist, weil BAL = EDC, und BAK = EDG gemacht worden, KAL = GDC. Da auch KA, AL denen GD, DC, jede für sich, gleich sind, und gleiche Winkel einschließen; so ist (1, 4. S.) KL = GC. Aber KH = GF; folglich sind die LK, KH denen CG, GF, jede für sich, gleich, und schließen rechte Winkel ein; folglich HL = FC. Da ferner die HA, AL denen FD, DC, jede für sich, gleich sind, und vorhin HL = FC war: so ist (1, 8. S.) HAL = FDC.

Da also die drey ebenen Winkel BAL, BAH, HAL, welche den körperlichen Winkel bey A einschließen, denen drey ebenen Winkeln EDC, EDF, FDC, von welchen der körperliche Winkel bey D eingeschlossen wird, in der Ordnung wie sie genannt worden, gleich sind, und ähnliche Lage haben: so ist (11, B. S.) der körperliche Winkel bey A dem bey D gleich.

Note: Der 26. Satz setzt voraus, daß zwey körperliche Winkel, die von drey, jede für sich, gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen werden, gleich sind. Es ist aber doch auffallend, daß, wenigstens so viel mir bekannt ist, noch Keiner unter allen Auslegern des Euklides die im 25. und 26. Satze befindliche Lücke bemerkt hat. Clavius zwar äußert bey der 11. Erklärung dieses Buchs: „Es sey einleuchtend, daß körperliche Winkel, „welche von gleichen ebenen Winkeln in gleicher Anzahl

„ein-

„eingeschlossen werden, einander gleich seyn; weil sie, „wenn man sie in Gedanken in einander schöbe, sich decken, „congruent seyn würden.“ Allein Clavius behauptet dieß ohne allen Beweis, und viel zu allgemein. Denn außer dem Falle, wenn die körperlichen Winkel nur von drey ebenen Winkeln eingeschlossen werden, die, jeder für sich, gleich sind, ist diese Behauptung unrichtig. Es hat hiermit gerade die Bewandniß, wie mit dem Satze, daß zwey sphärische Triangel, deren Seiten gleich sind, gleichwinklig und congruent seyen; welches ohne Beweis eben so wenig zugestanden werden kann. Euklides nimmt dieß von geradlinigen Triangeln nicht an; er beweiset im 8. S. des 1. B., daß Triangel, deren Seiten gleich sind, gleiche Winkel haben, und hieraus folgt nach dem 4. S. desselben Buches ihre Gleichheit. Menelaus, Sphæricorum lib. 1. Prop. 4. beweiset ausführlich, daß sphärische Triangel, deren Seiten gleich sind, gleiche Winkel haben, woraus sich dann leicht folgern läßt, daß sie congruent sind, vorausgesetzt, daß ihre Seiten in einerley Ordnung und Lage sind.

Um die im 25. und 26. S. bemerkten Lücken auszufüllen, haben wir die Sätze A, B, C diesem Buche einverleibt. Bisher ruheten der 25. 26. 28. und mithin noch acht andere, von jenen abhängige Sätze dieses Buches, der 27. 31. 32. 33. 34. 36. 37. und 40. nähmlich, auf einem unsichern Grunde; wohin sich noch der 8. 12. 18. Satz und der Zusatz zum 17. Satze des 12. Buches, welche von der 9. Erklärung abhangen, zählen lassen; denn, daß Körper, welche von ähnlichen und gleichen Ebenen, in gleicher Anzahl, begrenzt, und körperliche Winkel, welche von gleichen ebenen Winkeln, in einerley Anzahl, eingeschlossen werden, nicht immer gleich sind, ist schon in der Note zu der 10. Erklärung dieses Buches dargethan worden.

Noch muß ich bemerken, daß Andreas Tacquet in seinem Euklides es als ein Merkmahl der Gleichheit kör-

körperlicher Winkel angibt, wenn sie, in einander gelegt, sich decken. Allein dieß ist ein Grundsatz, der von allen Größen wahr ist. Er stellte diese Erklärung aber in der Absicht auf, durch sie, und ohne den 35. S. zu Rathe zu ziehen, den 36. S. dieses Buches zu beweisen. Von seinem Beweise ein Mehreres in der Note zum 36. Satze.

Der 27. Satz.

Text: Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, ein Parallelepipedon zu construiren, das dem gegebenen, CD, ähnlich sey und mit demselben ähnliche Lage habe.

Stelle (11, 26. S.) an den Punkt A der AB einen, dem körperlichen Winkel bey C gleichen, körperlichen Winkel, der von den ebenen Winkeln BAI, IAH, HAB, welche in ihrer Ordnung denen ebenen Winkeln ECG, GCF, FCE gleich sind; mache (6, 12. S.) EC:CG = BA:AI, und GC:CF = IA:AH, daß folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen EC:CF = BA:AH sey; vollende das Parallelogramm BH, und den Körper AK.

Da also EC:CG = BA:AI, mithin die, die gleichen Winkel ECG, BAI einschließenden, Seiten proportionirt sind; so ist das Parallelogramm BI dem Parallelogramme EG ähnlich. Aus denselben Gründen sind die Parallelogramme IH, GF, und HB, FE ähnlich; also drey Parallelogramme des Körpers AK drey Parallelogrammen des Körpers CD ähnlich. Nun sind (11, 24. S.) die drey, diesen dreyen gegenüber liegenden, Parallelogramme an beyden Körpern ähnlich und gleich; auch sind, weil die ebenen Winkel, welche an gedachten Körpern die körperlichen Winkel einschließen, einander gleich und ähnliche Lage haben, (11, B. S.) die körperlichen Winkel gleich: folglich ist (11, 11. E.) AK ∽ CD.

Der 28. Satz.

Text: Lehrsatz. Jedes Parallelepipedon, AB, wird von einer Ebene, CDEF, welche zwey einander gegenüber liegende Ebenen desselben, GB, AH, nach deren Diagonalen, CF, DE, schneidet, halbirt.

Da CD, FE der, mit ihnen nicht in einerley Ebene befindlichen, AG parallel sind; so sind sie (11, 9. S.) einander parallel; folglich sind (11, 16. S.) die Diagonalen CF, DE mit gedachten Parallellinien in einerley Ebene und selbst einander parallel.

Da (1, 34. S.) $\triangle CGF = \triangle CBF$, $\triangle DAE = \triangle DHE$; auch (11, 24. S.) $CA = BE$, $GE = CH$; so werden die Prismen CGFEDA, FCBHED von ähnlichen und gleichen Ebenen, in einerley Ordnung begrenzt, und sind folglich (11, C. S.) gleich. Folglich wird das Parallelepipedon von der Ebene CDEF halbirt.

Note: Hier mußte bewiesen, nicht angenommen werden, daß die Diagonalen in Einer Ebene sind. Diese Lücke füllte Clavius aus.

Der 29. Satz.

Text: Lehrsatz. Parallelepipeda, AH, AK, von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche, AB, deren auf der Grundfläche stehende Seitenlinien sich in denselben geraden Linien endigen, sind gleich.

Erster Fall. (Fig. 62a.) Die auf der Grundfläche AB stehenden Seitenlinien AF, AG, LG, LN endigen sich in der geraden Linie FGN, und CD, CH, BH, BK in der geraden Linie DHK. Die Parallelogramme DG, HN, welche der Grundfläche AB gegenüber liegen, haben die Seite HG gemein.

Da der Körper AH von der, durch die ähnlich liegenden Diagonalen AG, CH der einander gegenüberstehenden Ebenen ALGF, CBHD gehenden, Ebene AGHC

AGHC geschnitten wird; so wird (11, 28. S.) AH von solcher Ebene halbirt. Der Körper AH ist also das Zwiefache des von den Triangeln ALG, CBH begrenzten Prisma. Nun wird der Körper AK von der, durch die ähnlich liegenden Diagonalen LG, BH der einander gegenüber stehenden Ebenen ALNG, CBKH gehenden, Ebene LGBH geschnitten; folglich ist der Körper AK ebenfalls das Zwiefache des von den Triangeln ALG, CBH begrenzten Prisma. Folglich AH = AK.

Zweyter Fall. (Fig. 62b.) Die auf der Grundfläche AB stehenden Seitenlinien AF, AG, LM, LN endigen sich in der geraden Linie FN, und CD, CE, BH, BK in der geraden Linie DK. Die der Grundfläche AB gegenüber liegenden Parallelogramme DM, EN sind von einander abgesondert.

Da (1, 34. S.) DH = CB, EK = CB; so ist DH = EK; folglich, wenn zu beyden Linien die HE hinzukommt, DE = HK. Folglich ist (1, 38. S.) △ CDE = △ BHK. Auch ist (1, 36. S.) DG = HN. Aus denselben Gründen ist △ AFG = △ LMN. Ferner ist (11, 24. S.) CF = BM, CG = BN. Daher ist (11, C. S.) das von den Triangeln AFG, CDE und den drey Parallelogrammen AD, DG, GC begrenzte Prisma dem Prisma gleich, das die Triangel LMN, BHK und die drey Parallelogramme BM, MK, KL begrenzen. Nimmt man nun die Prismen LMNBHK, AFGCDE von dem Körper weg, dessen Grundfläche AB und dessen, ihr gegenüber liegende Ebene FDKN ist: so ist der übrig, bleibende Körper, nähmlich das Parallelepipedon AH, dem übrig bleibenden, nähmlich dem Parallelepipedon AK, gleich.

Dritter Fall. Die der Grundfläche AB gegenüber liegenden Parallelogramme FH, GI, haben einen gemeinschaftlichen Flächentheil, GH.

[Wie im Grundtexte.]

Note: Dieser Satz begreift drey Fälle unter sich. In dem ersten haben die der gemeinschaftlichen Grundfläche gegenüber liegenden Parallelogramme eine Seite gemein; in dem zweyten sind sie von einander abgesondert; in dem dritten haben sie einen Flächentheil gemein. Bloß für den letzten gilt der Beweis, welchen der Grundtext bisher hatte. Der erste Fall läßt sich unmittelbar aus dem 28. Satze, der wohl in dieser Absicht vorangeschickt ist, darthun. Nur bey diesem Falle und dem 40. S. ist gedachter Satz brauchbar, und unmittelbar vor den 40. S. würde ihn Euklides doch gestellt haben, hätte er sich desselben nicht schon bey dem 29. S. bedient. Aber ein der Sache unkundiger Herausgeber ließ diesen ersten Fall ganz aus, und verstümmelte den Euklidischen Beweis für die beyden übrigen Fälle, welchen wir nun vollständig wiederhergestellt haben, und welcher für beyde Fälle zugleich brauchbar ist.

[Mit einer geringen Abänderung nähmlich ist der von Simson für den zweyten Fall gegebene Beweis mit dem für den dritten ganz derselbe; wie sogleich erhellet, wenn man die deutsche Uebersetzung damit vergleicht.]

Der 30. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 63.) Parallelepipeda, CM, CN, von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche, AB, wenn sich auch ihre auf der Grundfläche stehenden Seitenlinien, AF, AG, CD, CE, und LM, LN, BH, BK, nicht in einerley geraden Linien endigen, sind dennoch gleich.

Verlängere FD, MH, NG, KE, bis sie sich in den Punkten O, P, Q, R schneiden, und ziehe AO, LP, BQ, CR.

Da die Ebene LBHM der ihr gegenüber liegenden Ebene ACDF parallel ist; in der Ebene LBHM die Parallelinien LB, MHPQ, ingleichen die Figur BLPQ, aber in der ACDF die Parallelinien AC, FDOR, deßgleichen

gleichen die Figur CAOR sind: so sind die Figuren BLPQ, CAOR in Parallelebenen. Da die Ebene ALNG der ihr gegenüber stehenden Ebene CBKE parallel ist, und in der Ebene ALNG die Parallellinien AL, OPGN, auch die Figur ALPO, in der Ebene CBKE hingegen die Parallellinien CB, RQEK, auch die Figur CBQR sind: so sind die Figuren ALPO, CBQR in Parallelebenen. Nun sind auch die Ebenen ACBL, ORQP parallel; folglich ist der Körper CP ein Parallelepipedon. Nun sind die Körper CM, CP auf einerley Grundfläche ACBL, welcher in jenem das Parallelogramm FDHM, in diesem das Parallelogramm ORQP gegenüber stehet, und ihre auf der Grundfläche stehenden Seitenlinien AF, AO, CD, CR; LM, LP, BH, BQ endigen sich in einerley geraden Linien FR, MQ; folglich ist (11, 29. S.) CM = CP. Aber der Körper CP stehet auch mit dem Körper CN auf derselben Grundfläche ACBL, und beyder auf derselben stehende Seitenlinien AO, AG, LP, LN, CR, CE, BQ, BK endigen sich in einerley geraden Linien ON, RK; folglich ist (11, 29. S.) CP = CN. Nun war CP = CM; also CM = CN.

Note: Der Beweis im Grundtexte zeigt nicht, daß die einander gegenüber liegenden Ebenen des Körpers CP in unserer Figur, das ist des Körpers CO in der Figur Commandini's, [Siehe die deutsche Uebersetzung] parallel sind; wir glaubten, dieß um der Anfänger Willen zeigen zu müssen.

Der 31. Satz.

Text: Lehrsatz. Parallelepipeda, AE, CF, von gleicher Höhe und auf gleichen Grundflächen, AB, CD, sind gleich.

Erster Fall. (Fig. 64ª.) Die auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien sind perpendikular auf denselben.

Bringe

Bringe die Körper so an einander, daß die Grundflächen in Eine Ebene und die Seiten CL, LB in Eine gerade Linie kommen; so ist (11, 13. S.) die im Punkte L stehende LM den Körpern AE, CF gemein. Die übrigen auf den Grundflächen stehenden geraden Linien sind AG, HK, BE; DF, OP, CN. Nun sey

Erstlich der Winkel ALB = CLD. Hier sind also AL, LD in Einer geraden Linie. Verlängere OD, HB, welche einander in Q treffen, und vollende das Parallelepipedon LR, dessen Grundfläche das Parallelogramm LQ ist, und LM eine der darauf stehenden Seitenlinien.

Da AB = CD; so ist (5, 7. S.) AB : LQ = CD : LQ. Nun ist das Parallelepipedon AR von der, seinen einander gegenüber stehenden Ebenen AK, DR parallelen, Ebene LMEB geschnitten; folglich ist (11, 25. S.) AB : LQ = AE : LR. Ferner wird das Parallelepipedon CR von der, seinen gegenüber stehenden Ebenen CP, BR parallelen, Ebene LF geschnitten; folglich ist (11, 25. S.) CD : LQ = CF : LR. Nun war AB : LQ = CD : LQ; folglich AE : LR = CF : LR. Daher ist (5, 9. S.) AE = CF.

Wieder seyen die Parallelepipeda SE, CF auf gleichen Grundflächen SB, CD, und von gleicher Höhe, und ihre auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien darauf perpendikular. Bringe auch hier die Grundflächen SB, CD in Eine Ebene, so daß CL, LB in Eine gerade Linie kommen. Nun sey aber

Zweytens der Winkel SLB dem Winkel CLD nicht gleich: so ist dennoch SE = CF.

Verlängere DL, TS bis sie einander in A treffen; ziehe durch B der DA die BH parallel; verlängere HB, OD bis sie sich in Q treffen; vollende die Körper AE, LR.

Nun sind die Körper AE, SE auf einerley Grundfläche LE, welcher in jenem die Ebene AK, in diesem

die

die Ebene SX gegenüber stehet, und von einerley Höhe, auch endigen sich ihre auf der Grundfläche stehenden Seitenlinien LA, LS, BH, BT; MG, MV, EK, EX in einerley geraden Linien AT, GX; folglich ist (11, 29. S.) AE = SE. Da aber (1, 35. S.) AB = SB, und SB = CD, also AB = CD, ferner auch ALB = CLD: so ist, nach dem oben Erwiesenen, AE = CF. Folglich ist SE = CF.

Zweyter Fall. (Fig. 64b.) Die auf den Grundflächen AB, CD stehenden Seitenlinien AG, HK, BE, LM; CN, RS, DF, OP sind darauf nicht perpendikular.

Fälle (11, 11. S.) aus den Punkten G, K, E, M; N, S, F, P auf die untere Ebene die Perpendikel GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FI, PU, welche gedachte Ebene in den Puncten Q, T, V, X; Y, Z, I, U treffen, und ziehe QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, IU, UY.

Da GQ, KT auf einerley Ebene perpendikular sind, so sind sie (11, 6. S.) einander parallel. Nun sind auch MG, EK einander parallel; folglich sind (11, 15. S.) die Ebenen MQ, ET parallel. Aus dem nähmlichen Grunde sind auch die Ebenen MV, GT parallel. Folglich ist QE ein Parallelepipedon. Eben so wird bewiesen, daß YF ein Parallelepipedon sey. Nun sind EQ, FY von gleicher Höhe, auf gleichen Grundflächen MX, PS, und ihre Seitenlinien stehen auf diesen Flächen perpendikular; folglich sind, nach dem ersten Falle, EQ, FY gleich. Aber (11, 29. oder 30. S.) EQ = AE, und FY = CF; daher AE = CF.

Note: Man unterscheide bey diesem Satze zwey Fälle: einmahl, wenn die auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien darauf perpendikular; dann, wenn sie darauf nicht perpendikular sind. Der erste Fall begreift wieder zwey andere unter sich: den einen, worin die Grundflächen gleichwinklige, den andern, worin

sie

sie ungleichwinklige Parallelogramme sind. Jenes Unterfalles gedenkt der Herausgeber des Griechischen Textes nicht, sondern verflicht den Beweis davon in den Beweis des andern Unterfalles, als einen Theil desselben. Dieß hätte er billig in einem Zusatze bemerken sollen. Uns schien die besondere Erörterung eines Jeden von beyden die Deutlichkeit zu befördern. Auch haben wir den Beweis, indem wir den Weg gingen, welchen Euklides im 6, 14. S. nahm, kürzer gefaßt. Ferner zeigt der Herausgeber im Beweise des zweyten Hauptfalles nicht, daß die durch die Construction erhaltenen Körper Parallelepipeda sind, welches zu zeigen Euklides nicht versäumt haben wird. Endlich sind die Worte am Ende des Satzes: „deren auf der Grundfläche stehende Seitenlinien sich „nicht in einerley geraden Linien endigen" eines Unkündigen Zusatz; denn allerdings können sie sich in einerley geraden Linien endigen.

Der 32. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 65.) Parallelepipeda, AB, CD, von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, AE, CF.

Entwirf (Simf. T. 1, 45. Zuf.) an der geraden Linie FG ein dem Parallelogramme AE gleiches Parallelogramm FH, so daß FGH = LCG; vollende das Parallelepipedon GK, dessen Grundfläche FH, und eine von den darauf stehenden Seitenlinien FD sey; so sind die Körper AB, GK auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe, folglich (11, 31. S.) gleich. Nun wird das Parallelepipedon CK von der, zweyen seiner einander gegenüber stehenden Ebenen paralleten, Ebene DG geschnitten; folglich ist (11, 25. S.) HF : FC = HD : DC. Nun war FH = AE, und AB = GK; daher AE : CF = AB : CD.

Zusatz.

Zusatz. Daher verhalten sich Prismen, deren Grundflächen Triangel und welche von gleicher Höhe sind, wie diese Grundflächen.

Es seyen die Prismen, deren Grundflächen die Triangel AEM, CFG sind, welchen die Triangel NBO, PDQ gegenüber stehen, von gleicher Höhe. Man vollende die Parallelogramme AE, CF, und die Parallelepipeda AB, CD; auch sey an jenem MO, an diesem GQ, eine von den auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien. Da nun die Parallelepipeda AB, CD gleiche Höhe haben; so ist AB : CD = AE : CF; gedachte Prismen aber sind (11, 28. S.) die Hälften derselben: folglich verhalten sie sich = AE : CF, das ist, △ AEM : △ CFG.

Note: Der Herausgeber des Grundtextes forderte nicht, auf der geraden Linie FG das Parallelogramm FH unter dem Winkel FGH = LCG zu zeichnen. Dieß ist jedoch nöthig, und Clavius that wohl, daß er diese Lücke ausfüllte.

Ueber dieß verlangt der Grundtext in der Construction, daß auf der Grundfläche FH, in einerley Höhe mit CD, das Parallelepipedon GK vollendet werde. Da sich aber unzählig viele Körper, welche dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe haben, construiren lassen; so mußte es hier heißen: „Vollende das Parallelepipedon „GK, dessen Grundfläche FH, und eine von den darauf „stehenden Seitenlinien FD sey." Im 33. S. ist dieselbe Verbesserung zu machen.

Der 33. Satz.

Text: Lehrsatz. Die Verhältniß ähnlicher Parallelepipeda, AB, CD, ist das Dreyfache der Verhältniß ihrer homologen Seiten, AE, CF.

Verlängere AE, GE, HE, bis EI = CF, EK = FM, EL = FQ ist. Vollende das Parallelogramm

KI,

KI, und den Körper IO. Da demnach EI, EK denen CF, FM gleich, auch IEK = CFM = AEG, wegen Aehnlichkeit der Körper AB, CD; so ist IK = und ∽ CM. Aus demselben Grunde ist LI = und ∽ CQ, und OE = und ∽ FD. Folglich sind drey Parallelogramme des Körpers IO drey Parallelogrammen des Körpers CD gleich und ähnlich. Nun sind auch die drey, diesen gegenüber stehenden, Parallelogramme gleich und ähnlich; folglich ist (11, C. S.) IO dem CD gleich und ähnlich. Vollende das Parallelogramm GI, und auf den Grundflächen GI, IK, mit AB in gleicher Höhe, die Körper EN, KP, so daß EH eine von ihren auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien sey. Da AB ∽ CD; so ist, u. s. w. [in der deutschen Uebersetzung.]

Der D. Satz. Lehrsatz.

[Text hinter dem 33. Satze.]

Die Verhältniß (Fig. 66.) gleichwinkliger Parallelepipeda, die nähmlich von gleichwinkligen Parallelogrammen begrenzt werden, das ist, deren körperliche Winkel gleich sind, AB, CD, ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten, AM:DL, AN:DK, AO:DH, zusammengesetzt.

Es seyen also an den Körpern AB, CD die Parallelogramme AE, AF, AG denen CH, CK, CL, in der Ordnung, worin sie genannt worden, gleichwinklig.

Verlängere MA, NA, OA nach P, Q, R bis AP = DL, AQ = DK, AR = DH; vollende das Parallelepipedon AX, begrenzt von den Parallelogrammen AS, AT, AV, denen CH, CK, CL, in genannter Ordnung, gleich und ähnlich; so ist (11, C. S.) AX = CD. Vollende auch den Körper AY, dessen Grundfläche AS, und eine von seinen darauf stehenden Seitenlinien AO sey. Nimm eine beliebige gerade Linie a, und mache

MA

MA:AP=a:b, hingegen NA:AQ=b:c, und OA :AR=c:d.

Da also AE dem Parallelogramme AS gleichwinklig ist, so ist (6, 23. S.) AE:AS=a:c. Nun sind die Körper AB, AY zwischen einerley Parallelebenen BOY, EAS, folglich von gleicher Höhe; daher ist (11, 32. S.) AB:AY=AE:AS=a:c. Aber (11, 25. S.) AY:AX=OQ:QR=OA:AR=c:d; folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen AB:AX=a:d, das ist, AB:CD=a:d. Nun ist (5, A. E) a:d=(a:b)+(b:c)+(c:d)=(MA:AP)+(NA :AQ)+(OA:AR)=(AM:DL)+(AN:DK)+(OA:DH); folglich ist AB:CD=(AM:DL)+(AN :DK)+(AO:DH).

Note: Höchst wahrscheinlich hatte Euklides diesem Satze nicht minder, wie dem ähnlichen von gleichwinkligen Parallelogrammen (6, 23. S.) eine Stelle in seinen Elementen angewiesen.

Der 34. Satz.

Text: Lehrsatz. Die Grundflächen, EH, NP, gleicher Parallelepipeda, AB, CD, sind in umgekehrter Verhältniß ihrer Höhen. Und Parallelepipeda, AB, CD, deren Grundflächen, EH, NP, in umgekehrter Verhältniß ihrer Höhen sind, sind gleich.

Erster Fall. (Fig. 67a.) Die auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien AG, EF, LB, HK; CM, NX, CD, PR, sind darauf perpendikular. Nun sey im

Ersten Theile, wo EH:NP=MC:AG seyn soll, wenn AB=CD ist.

Erstlich, die Grundfläche EH der Grundfläche NP gleich.

Da nach der Voraussetzung AB=CD; so ist (11, 31. S.) CM=AG. Denn wären, bey gleichen Grundflächen,

flächen, nicht auch die Höhen gleich; so könnten auch die Körper AB, CD nicht gleich seyn; welches doch angenommen wurde. Folglich müssen die Höhen gleich, also EH:NP=CM:AG seyn.

Zweytens (Fig. 67b.) seyen die Grundflächen EH, NP ungleich, und zwar EH>NP.

Nun ist AB=CD; folglich CM>AG. Wäre dem so nicht, so wären wieder gedachte Körper nicht gleich, die doch als gleiche Körper angenommen sind. Man setze daher CT=AG, und vollende über der Grundfläche NP, in der Höhe CT, das Parallelepipedon CV. Da AB=CD; so ist (5, 7. S.) AB:CV=CD:CV. Nun ist (11, 32. S.) AB:CV=EH:NP; und (11, 25. S.) CD:CV=MP:PT=(6, 1. S.) MC:CT; folglich EH:NP=MC:CT. Nun war CT=AG; folglich EH:NP=MC:AG.

Ferner sey im

Zweyten Theile, wo, für EH:NP=MC:AG, der Körper AB= Körper CD seyn soll, wieder

Erstlich, (Fig. 67a.) EH=NP; so ist (5, A. S.) MC=AG; folglich (11, 31. S.) AB=CD.

Zweytens (Fig. 67b.) sey EH>NP; so ist (5, A. S.) MC>AG. Mache CT=AG, und vollende den Körper CV. Da EH:NP=CM:AG, so ist EH:NP=MC:CT. Aber (11, 32. S.) EH:NP=AB:CV, und (6, 1. S.) MC:CT=MP:PT=(11, 25. S.) CD:CV; folglich AB:CV=CD:CV; daher (5, 9. S.) AB=CD.

Zweyter Fall. (Fig. 67c.) Die auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien FE, BL, GA, RH; XN, DO, MC, RP sind darauf nicht perpendikular.

Fälle aus den Punkten F, B, K, G; X, D, R, M auf die Ebenen der Grundflächen EH, NP, welche diese in den Punkten S, Y, V, T; Q, I, U, Z treffen; vollende die Körper FV, XU, welche, wie im letzten

ten Falle des 31. S. dieses Buches gezeigt worden, Parallelepipeda seyn werden.

Erster Theil. Wenn AB = CD, so ist EH: NP = Höhe von CD: Höhe von AB.

Denn da AB = CD, und (11, 29. oder 30. S.) AB = BT, DC = DZ; so ist BT = DZ. Folglich nach dem ersten Falle, FK: XR = Höhe von DZ: Höhe von BT. Nun ist FK = EH, XR = NP; folglich EH: NP = Höhe von DZ: Höhe von BT. Nun sind die Höhen der Körper BT, BA, so wie der Körper DZ, DC Höhen dieselben; daher EH: NP = Höhe von CD: Höhe von AB.

Zweyter Theil. Ist EH: NP = Höhe von CD: Höhe von AB, so ist AB = CD.

Denn für die vorige Construction ist EH = FK, NP = XR; also FK: XR = Höhe von CD: Höhe von AB. Nun ist Höhe von CD = Höhe von DZ, Höhe von AB = Höhe von BT; folglich FK: XR = Höhe von DZ: Höhe von BT. Daher ist, nach dem ersten Falle, BT = DZ. Nun ist (11, 29. oder 30. S.) BT = BA, DZ = DC; also AB = CD.

Note: In dem Beweise dieses Satzes kommen die Worte: „ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν; „das ist, deren auf der Grundfläche stehende Seitenlinien „sich nicht in einerley geraden Linien endigen," drey Mahle vor. Entweder muß man sie, mit Clavius, ganz auslassen, oder man muß in ihre Stelle setzen: „deren „auf der Grundfläche stehende Seitenlinien entweder in „einerley geraden Linien sich endigen, oder nicht;" denn aus Unkunde ist der andere Fall ausgelassen worden.

Ferner finden sich die Worte: „ὧν τὰ ὕψη, deren Höhen," zwey Mahle im Texte; ein offenbares Versehen. Es sollte heißen: „ὧν ἐφεστῶσαι, deren auf der Grund„fläche stehende Seitenlinien;" denn die Höhe ist ja immer ein Perpendikel auf der Grundfläche.

Der 35. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 68.) Werden auf zwey gleiche ebene Winkel, BAC, EDF, in ihren Scheitelpunkten, A, D, gerade Linien, AG, DM, so gestellt, daß sie mit den Linien, welche gedachte Winkel einschließen, gleiche Winkel, GAB = MDE, GAC = MDF, machen; werden ferner aus beliebigen Punkten der aufgestellten Linien, G, M, auf zuerst gedachter Winkel Ebenen Perpendikel, GL, MN, gefället, und von den Punkten, L, N, wo diese Perpendikel die Ebenen treffen, nach oben gedachten Scheitelpunkten, A, D, gerade Linien, LA, ND, gezogen: so schließen solche mit den aufgestellten Linien gleiche Winkel, GAL, MDN, ein.

Mache AH = DM, und ziehe der GL durch H die AK parallel. Nun ist LG auf der Ebene BAC perpendikular, folglich auch (11, 8. S.) HK. Fälle aus den Punkten K, N auf die geraden Linien AB, AC, DE, DF, in den Ebenen BAC, EDF, die Perpendikel KB, KC, NE, NF, und ziehe HB, BC, ME, EF.

Da HK auf der Ebene BAC perpendikular ist, so ist auch (11, 18. S.) die durch HK gelegte Ebene HBK auf der Ebene BAC perpendikular. Nun ist in der Ebene BAC die AB auf dem gemeinsamen Durchschnitte BK der Ebenen perpendikular; folglich ist (11, 4. S.) AB selbst auf der Ebene HBK perpendikular, folglich (11, 3, S.) auf allen geraden Linien, welche sie in gedachter Ebene treffen. Daher ist ABH = R. Aus gleichem Grunde ist DEM = R; also ABH = DEM. Nun ist auch HAB = MDE und HA = DM; folglich ist (1, 26. S.) AB = DE. Eben so läßt sich, wenn HC, MF gezogen worden sind, beweisen, daß AC = DF. Da also AB = DE, AC = DF, auch BAC = EDF; so ist (1, 4. S.) BC = EF; folglich ABC = DEF. Nun ist ABK = R = DEN; folglich CBK = FEN.

Aus

Aus gleichem Grunde ist BCK = EFN. Nun ist auch BC = EF; daher (1, 26. S.) BK = EN. Aber AB = DE, und bey B, E rechte Winkel; also AK = DN. Nun ist AH = DM, also □ AH = □ DM. Aber □ AH = □ AK + □ KH, weil AKH = R; und □ DM = □ DN + □ NM, weil DNM = R. Folglich □ AK + □ KH = □ DN + □ NM. Nun ist □ AK = □ DN; daher □ KH = □ NM; folglich HK = MN. Nun war HA = MD, AK = DN; folglich (1, 8. S.) HAK = MDN.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß, wenn die auf zwey gleichen ebenen Winkeln BAC, EDF in ihren Scheitelpunkten A, D errichteten gleichen geraden Linien AH, DM gleiche Winkel mit denen Linien machen, welche erstgedachte Winkel einschließen, die aus den Endpunkten der aufgestellten Linien H, M auf die Ebenen der Winkel gefällten Perpendikel HK, MN gleich sind.

Anderer Beweis dieses Zusatzes. Da der körperliche Winkel bey A von drey ebenen Winkeln BAC, BAH, HAC eingeschlossen wird, die, jeder für sich, denen drey ebenen Winkeln, EDF, EDM, MDF, welche den körperlichen Winkel bey D einschließen, gleich sind: so sind gedachte körperliche Winkel congruent. Denn legt man BAC auf EDF; so wird (11, B. S.) die AH mit der DM zusammenfallen, und da AH = DM, der Punkt H mit dem Punkte M. Daher wird (11, 13. S.) der Perpendikel HK auf der Ebene BAC dem Perpendikel MN auf der Ebene EDF congruent, folglich solche Perpendikel einander gleich seyn.

Note: Wir haben auf eine kürzere Art, als im Grundtexte, gezeigt, daß ABH, DEM rechte Winkel sind. Eben so läßt sich dieß von den Winkeln ACH, DFM beweisen; wir haben aber den Beweis nicht, wie im Grundtexte geschehen ist, wiederhohlt. Wahrscheinlich hat irgend ein Herausgeber den wiederhohlten Beweis dem Grundtexte zugesetzt, wie sich aus den Worten,

„ eben

„eben so wird bewiesen" abnehmen läßt. Denn diese Worte stehen immer nur dann, entweder wenn der Beweis nicht gegeben wird, oder, wird er gegeben, von dem vorhergehenden gewisser Maßen abweicht, wie z. B. im 26. Satze. Campanus hat diese Wiederhohlung nicht.

Von dem Zusatze haben wir einen andern Beweis gegeben, durch welchen der folgende 36. S. ohne Anwendung des 35. S. bewiesen wird.

Der 36. Satz.

Text: Lehrsatz. Sind drey gerade Linien, A, B, C, proportionirt; so ist das Parallelepipedon aus allen dreyen dem Parallelepipedon aus der mittlern, B, gleich, welches dem ersten gleichwinklig ist, und an welchem ein körperlicher Winkel von drey ebenen Winkeln eingeschlossen wird, die, jeder für sich, denen drey ebenen Winkeln gleich sind, welche einen körperlichen Winkel an dem ersten einschließen.

Stelle an E einen, von den ebenen Winkeln DEG, GEF, FED eingeschlossenen, körperlichen Winkel, mache jede der ED, EF, GE der B gleich, und vollende das Parallelepipedon EI. Mache LK = A, stelle an den Punkt K, an die LK, einen körperlichen Winkel, welchen die ebenen Winkel LKN, NKM, LKM, einschließen, die, nach ihrer Ordnung, denen GEF, DEG, FED gleich sind; mache KN = B, KM = C, und vollende das Parallelepipedon KH.

Hiernach ist, weil A : B = B : C vorausgesetzt worden, LK : EF = ED : KM; folglich (6, 14. S.) LM = DF. Nun sind die ebenen Winkel LKM, FED gleich, in deren Scheitelpunkten K, E gleiche gerade Linien RN, EG aufgestellt worden sind, die mit denen Linien, von welchen die ebenen Winkel eingeschlossen wer-

werden, gleiche Winkel machen; folglich sind (11, 35. Zus.) die aus den Punkten N, G auf die Ebenen LKM, FED gefällten Perpendikel gleich, folglich haben die Körper KH, EI gleiche Höhe. Nun hatten sie auch gleiche Grundflächen; folglich ist (11, 31. S.) KH = EI.

Note: Andreas Tacquet beweiset in seinem Euklides diesen Satz ohne Hülfe des 35. S.; es erhellet aber, daß man unter den Körpern, von welchen der 36. S., wie er jetzt im Grundtexte dastehet, Gleichwinkligkeit aussagt, solche verstehen müsse, deren körperliche Winkel von drey ebenen Winkeln eingeschlossen werden, die, jeder für sich, gleich sind und ähnliche Lage haben; wie aus der Construction klar ist. Daß diese körperlichen Winkel congruent sind, nimmt Tacquet bloß an, ohne es zu beweisen; denn er setzt die construirten Körper voraus, und zeigt nicht, wie man sie construiren müsse, wie es im Griechischen Texte geschehen ist. Jedoch wird sein Beweis durch den von uns für den vorigen Zusatz gegebenen Beweis auch in dem Falle gültig gemacht, wo die Körper, wie im Grundtexte, construirt werden.

Der 37. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 69.) Sind vier gerade Linien, AB, CD, EF, GH, proportionirt; so sind die auf denselben construirten ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelepipeda, AK, CL, EM, GN, auch proportionirt. Und sind vier solche Parallelepipeda proportionirt; so sind auch die vier geraden Linien, worauf sie construirt worden, proportionirt.

Erster Theil. Mache (6, 11. S.) AB, CD, O, P, deßgleichen EF, GH, Q, R stetig proportionirt. Da nun AB : CD = EF : GH; so ist (5, 11. S.) CD : O = GH : Q, und O : P = Q : R. Folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen AB : P = EF : R. Nun ist (11,

33. Zuſ.) AB:P=AK:CL, und EF:R=EM:GN; alſo (5, 11. S.) AK:CL=EM:GN.

Zweyter Theil. Mache AB:CD=EF:ST; conſtruire auf ST (11, 27. S.) ein Parallelepipedon SV, das denen EM, GN ähnlich ſey und damit ähnliche Lage habe.

Da AB:CD=EF:ST, auf AB, CD Parallelepipeda denen AK, CL ähnlich und ihnen ähnlich liegend, auf EF, ST Parallelepipeda, denen EM, SV ähnlich und ihnen ähnlich liegend, conſtruirt ſind: ſo iſt AK:CL=EM:SV. Nun iſt angenommen AK:CL=EM:GN; folglich (5, 9. S.) GN=SV. Aber GN iſt SV ähnlich und hat damit ähnliche Lage; folglich ſind die Ebenen, von welchen beyde begrenzt werden, gleich und ähnlich, auch ihre homologen Seiten GH, ST gleich. Da alſo AB:CD=EF:ST, aber ST=GH; ſo iſt AB:CD=EF:GH.

Note: Hier wird angenommen, daß Verhältniſſe, welche die Dreyfachen gleicher Verhältniſſe ſind, einander, und daß Verhältniſſe, deren Dreyfache gleich ſind, gleich ſeyen. Ohne Beweis läßt ſich dieß nicht zugeben. Euklides nahm ja auch den erſten und leichtern dieſer Sätze nicht an, ſondern bewies ihn für den Fall des Zwiefachen einer Verhältniß, im 6, 22. S. Daher haben wir von dem vorliegenden Satze einen andern Beweis gegeben, der dem Euklidiſchen für den 6, 22. S. ähnlich iſt; wie Clavius vor uns gethan hat.

Der 38. Satz.

Note: Wenn verlangt wird, aus einem Punkte einer Ebene, welche auf einer andern perpendikular iſt, auf dieſe andere einen Perpendikel zu fällen, ſo leiſtet man dieß, indem man aus gedachtem Punkte einen Perpendikel auf den gemeinſamen Durchſchnitt der Ebenen fället,

fället, weil solcher Perpendikel nach der 4. Erklärung dieses Buches auf der untern Ebene perpendikular seyn wird. Ungereimt würde es seyn, dieser Forderung nach Anweisung des 11. S. dieses Buches Genüge leisten zu wollen. Euklides aber im 12, 17. S., Apollonius und andere Geometer, wenn sie dieses Problem gebrauchen, verlangen, einen Perpendikel aus einem Punkte auf die untere Ebene zu fällen, und schließen, daß er den gemeinsamen Durchschnitt der Ebenen treffe, weil dieß eben dahin führt, wohin die obige Construction geführt haben würde, wenn man noch schlösse, daß die gezogene gerade Linie auf der untern Ebene perpendikular wäre. Jemand, der diese Uebereinstimmung nicht bemerkte, glaubte, diesen Satz, der von gar keinem Nutzen ist, dem 11. Buche zusetzen zu müssen.

* Daß dieser Satz ein müßiger Zusatz sey, erhellet auch daraus, daß er nahe am Ende des 11. Buches unter Sätzen stehet, mit welchen er nicht den geringsten Zusammenhang hat.

Der 39. Satz.

Text: Lehrsatz. Werden die Seiten zweyer einander gegenüber liegenden Ebenen, CF, AH, eines Parallelepipedons, AF, halbirt und durch die Halbirungspunkte K, M, I, L; N, O, Q, P, Ebenen, IM, NQ, gelegt: so halbiren solcher Ebenen Durchschnittslinie, TR, und des Parallelepipedons Diagonale, DG, einander.

Ziehe IK, LM, NO, PQ. Da DI, CK gleich und parallel sind; so sind (1, 33. S.) IK, DC parallel. Aus gleichem Grunde sind LM, BA parallel. Nun ist BA der DC parallel; folglich (11, 9. S.) IK der BA, und eben daher IK der LM parallel. Folglich sind IK, LM in Einer Ebene. Eben so wird bewiesen, daß NO, PQ in Einer Ebene sind. [Das Folgende wie im Grundtexte.]

Note: Hier wird angenommen, daß die geraden Linien, welche die Seiten zweyer einander gegenüber liegenden Ebenen eines Parallelepipedons halbiren, in Einer Ebene sind; es hätte aber bewiesen werden müssen, welches wir nun geleistet haben.

Der 40. Satz.

Text: Lehrsatz. Zwey dreyseitige, gleich hohe Prismen, ABCDEF, GHIKLM, von welchen das eine einen Triangel, GHI, das andere ein Parallelogramm, AF, das doppelt so groß als der Triangel ist, zur Grundfläche hat, sind einander gleich.

Vollende die Körper AN, GO. Da AF = 2 △ GHI, aber (1, 34. S.) HI = 2 △ GHI; so ist AF = HI. Nun sind beyder Körper Höhen einander gleich; folglich (11, 31. S.) AN = GO. Aber es ist (11, 28. S.) Pris. ABCDEF = ½ AN, und Pris. GHIKLM = ½ GO; also Prisma ACCDEF = Prisma GHIKLM.

Das zwölfte Buch.

Note zum 12. Buche überhaupt: Der gelehrte Jacob Moor, Professor der Griechischen Sprache auf der Universität zu Glasgow, bemerkte gegen mich: Aus dem Briefe an den Dositheus, den Archimedes seinen Büchern von der Kugel und dem Cylinder vorangeschickt, und den dieser mein College aus alten Manuscripten wieder hergestellt hat, erhelle ganz deutlich, daß Eudoxus der Erfinder der vornehmsten in diesem 12. Buche enthaltenen Sätze gewesen sey.

[Archimedes erwähnt in gedachtem Briefe nahmentlich der beyden Sätze: daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma sey, welches mit ihr einerley Grundfläche und gleiche Höhe hat, daß jeder Kegel der dritte Theil eines Cylinders sey, welcher mit ihm einerley Grundfläche und gleiche Höhe hat: und schreibt sie dem Eudoxus zu. Siehe Archimedes zwey Bücher über Kugel und Cylinder ꝛc. übersetzt von Hauber, Tübingen 1798. Seite 2.]

Der

Note. Im Anfange des Beweises heißt es: „Wäre „dieß nicht; so sey □BD:□FH = Kreis ABCD:R, „so daß der Flächenraum R entweder kleiner oder größer „als der Kreis EFGH sey.“ So etwas wird ebenfalls am Ende dieses Satzes, und in dem 5. 11. 12. 18. S, dieses Buches gesetzt. Hierüber bemerke man Folgendes: Der Beweis eines Lehrsatzes läßt sich in diesem und jedem ähnlichen Falle mit hinreichender Schärfe führen, wenn die Möglichkeit dessen, das man setzt, an sich einleuchtet, obgleich es nicht geometrisch construirt werden kann. Hier zum Beyspiel wird angenommen, daß es zu den Quadraten von BD, FH und dem Kreise ABCD eine vierte Proportionalgröße gebe, weil ein dem Kreise ABCD gleiches Quadrat denkbar ist, obwohl es nicht geometrisch gefunden werden kann. Zu den drey geradlinigen Figuren aber, den Quadraten von BD, FH nähmlich und dem Quadrate, welches dem Kreise ABCD gleich gesetzt wird, gibt es ein viertes Proportionalquadrat; denn (6, 12. S.) zu den Seiten der drey ersten kann die vierte Proportionallinie gefunden werden. Unter dem Flächenraume R wird nun der Flächenraum gedacht, der diesem vierten Quadrate gleich ist. Ein Aehnliches muß man in den übrigen angeführten Sätzen verstehen. Wahrscheinlich mag Euklides dieses auch gezeigt haben; irgend ein Herausgeber aber ließ es aus dem Grundtexte weg: denn der Lehnsatz, den ein Unkundiger diesem Satze anhing, dient ganz und gar nicht, hierin etwas zu erläutern.

[Dieser Lehnsatz lautet: Wenn der Raum S größer als der Kreis EFGH ist; so ist S: Kr. ABCD = Kr. EFGH: T, wo der Raum T kleiner als der Kreis ABCD ist.

Mache S: Kr. ABCD = Kr. EFGH: T; so ist (5, 16. S.) verwechselt S: Kr. EFGH = Kr. ABCD: T. Nun ist, nach der Voraussetzung, S > Kr. EFGH; folglich Kr. ABCD

ABCD > T; also S : Kr. ABCD = Kr. EFGH : Raume T, der kleiner als Kr. ABCD ist.]

Der 3. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 70.) Jede dreyseitige Pyramide, ABCD, läßt sich in zwey gleiche, einander und der ganzen ähnliche dreyseitige Pyramiden, und in zwey Prismen, die zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide sind, zerlegen.

Erster Theil. Halbire AB, BC, CA, AD, DB, DC in den Punkten E, F, G, H, K, L, und ziehe EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG.

Da AE = EB, AH = HD; so ist (6, 2. S.) HE der DB parallel. Aus demselben Grunde ist HK der AB parallel. Folglich HEBK ein Parallelogramm, und (1, 34. S.) HK = EB. Aber EB = AE; also AE = HK. Nun ist AH = HD, und (1, 29. S.) EAH = KHD; folglich (1, 4. S.) EH = KD, und △ AEH congruent △ HKD. Aus gleichen Gründen ist △ AGH congruent △ HLD. Da EH der KD, und HG der DL parallel ist; so ist (11, 10. S.) EHG = KDL. Da EH = KD, HG = DL, EHG = KDL; so ist (1, 4. S.) EG = KL, und △ EHG congruent △ KDL. Aus demselben Grunde ist △ AEG congruent △ HKL. Folglich ist (11, C. S.) die Pyramide, deren Grundfläche △ AEG und Gipfel H ist, gleich und ähnlich der Pyramide, deren Grundfläche △ KHL und Gipfel D ist.

Da im △ ADB der Seite AB die HK parallel gezogen ist, so sind die Triangel ADB, HDK gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt; folglich △ ADB ∽ △ HDK. Aus gleichem Grunde ist △ DBC ∽ △ DKL. Aber △ ADC ∽ △ HDL, und

△

$\Delta ABC \sim \Delta AEG$; auch war vorhin $\Delta AEG \sim \Delta HKL$; folglich (6, 21. S.) $\Delta ABC \sim \Delta HKL$. Daher ist (11, B. S. und 11. E.) die Pyramide, deren Grundfläche ΔABC und Gipfel D ist, ähnlich der Pyramide, deren Grundfläche ΔHKL und Gipfel D. Nun war vorhin dargethan, daß die letzte Pyramide der über dem ΔAEG und mit dem Gipfel H ähnlich sey; folglich ist die Pyramide, deren Grundfläche ΔABC und Gipfel D ist, der Pyramide ähnlich, die den ΔAEG zur Grundfläche und den Punkt H zum Gipfel hat. Folglich sind beyde Pyramiden AEGH, HKLD der ganzen Pyramide ABCD ähnlich.

Zweyter Theil. Da $BF = FC$, so ist (1, 41. S.) das Parallelogramm $EBFG = 2.\Delta GFC$. Nun ist (11, 15. S.) die Ebene ABC der Ebene HKL parallel; daher ist (11, 40. S.) das Prisma EBFGKH = Prisma GFCHKL.

Ziehet man die gerade Linie EF; so ist Prisma EBFGHK > Pyr. EBFK. Aber (11, C. S.) Pyr. EBFK = Pyr. AEGH; also Prisma EBFGKH > Pyr. AEGH. Nun war Prisma EBFGKH = Prisma GFCHKL, und Pyr. AEGH = Pyr. KHLD; folglich Prisma EBFGKH + Prisma GFCHKL > Pyr. AEGH + Pyr. KHLD.

Demnach ist die ganze Pyramide ABCD in zwey gleiche, einander und der ganzen ähnliche Pyramiden, und in zwey gleiche Prismen, welche zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide sind, zerlegt.

Note: Im Grundtexte und in den Versionen davon stehet: „Und da zwey gerade, einander treffende, Linien BA, AC" u. s. w. Hier wird die Gleichheit der Winkel BAC, KHL aus 11, 10. S. geschlossen. Dieser Schluß aber war schon vorher gemacht, als die Aehnlichkeit der Triangel EAG, KHL bewiesen wurde. Wir

haben

haben daher diese Wiederhohlung vermieden, und die Aehnlichkeit der Triangel ABC, HKL kürzer aus 6, 21. S. dargethan.

Der 4. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 71.) Werden zwey dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCG, DEFH, in zwey gleiche, einander und der ganzen ähnliche Pyramiden, und in zwey gleiche Prismen zerlegt, die dadurch entstandenen Pyramiden wieder auf eben die Art, und so fort: so verhalten sich alle Prismen in der einen zu denen von gleicher Anzahl in der andern Pyramide, wie die Grundfläche der einen, ABC, zu der Grundfläche der andern, DEF.

Die Construction sey, wie im vorigen Satze. Da BX = XC, AL = LC, so ist (6, 2. S.) XL der BA parallel, und △ ABC ∽ △ LXC. Aus demselben Grunde ist △ DEF ∽ △ RVF. Da BC = 2 CX, EF = 2 FV, so ist BC : CX = EF : FV. Nun sind über BC, CX die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren ABC, LXC, über EF, FV die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren DEF, RVF, gezeichnet; folglich (6, 22. S.) △ ABC : △ LXC = △ DEF : △ RVF, also verwechselt △ ABC : △ DEF = △ LXC : △ RVF. Da aber (11, 15. S.) die Ebenen ABC, OMN, so wie die Ebenen DEF, STY parallel sind, so werden (11, 17. S.) die aus den Gipfeln G, H auf die Grundflächen ABC, DEF gefällten Perpendikel, die einander gleich sind, von den Ebenen OMN, STY halbirt, weil auch die geraden Linien GC, HF von denselben Ebenen in N, Y halbirt sind. Folglich sind die Prismen LXCOMN, RVFSTY gleich hoch; folglich (11, 32. Zus.) LXC : RVF = ABC : DEF = Prisma LXCOMN : Prisma RVFSTY. Nun sind zwey Prismen in der Pyramide ABCG, auch zwey Prismen in der Pyramide DEFH einander gleich; folglich (5, 7. S.) Prisma KBXLMO : Prisma LXCOMN

LXCOMN = Prisma PEVRTS: Prisma RVFSTY; folglich verbunden Prisma KBXLMO + Prisma LXCOMN: Prisma LXCOMN = Prisma PEVRTS + Prisma RVFSTY: Prisma RVFSTY; und verwechselt Prisma KBXLMO + Prisma LXCOMN: Prisma PEVRTS + Prisma RVFSTY = Prisma LXCOMN: Prisma RVFSTY. Aber Prisma LXCOMN: Prisma RVFSTY = ABC: DEF; daher ABC: DEF = zwey Prismen in Pyr. ABCG: zwey Prismen in Pyr. DEFH. Zerlegt man nun die entstandenen Pyramiden OMNG, STYH eben so; so ist OMN: STY = zwey Prismen in Pyr. OMNG: zwey Prismen in Pyr. STYH. Nun ist OMN: STY = ABC: DEF; folglich ABC: DEF = 4 Prismen in Pyr. ABCG: 4 Prismen in Pyr. DEFH. Dasselbe läßt sich von den durch die Zerlegung der Pyramiden AKLO, DPRS entstandenen Prismen, und von allen durch ähnliche Zerlegung in gleicher Anzahl erhaltenen Prismen darthun.

Note: In diesem Satze haben wir Einiges genauer, als im Grundtexte geschehen ist, entwickelt.

Der 5. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 71.) Dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCG, DEFH, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABC, DEF.

Wäre dieß nicht, so sey ABC: DEF = Pyr. ABCG: zu einem Körper < oder > Pyr. DEFH.

Erster Fall. Es sey solcher Körper Q, und Q < Pyr. DEFH, also ABC: DEF = Pyr. ABCG: Q.

Zerlege die Pyr. DEFH in zwey einander gleiche, sich und der ganzen ähnliche Pyramiden, und in zwey gleiche Prismen. Folglich sind (12, 3. S.) diese zwey Prismen zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide. Die durch solche Zerlegung erhaltenen Pyramiden

miden zerlege auf eben die Art, und fahre damit fort, bis in der Pyramide DEFH gewisse Pyramiden übrig bleiben, welche kleiner sind, als der Ueberschuß der Pyramide DEFH über den Körper Q. Solche Pyramiden seyen DPRS, und STYH; so sind die in der Pyramide DEFH übrig gebliebenen Prismen größer als der Körper Q.

Die andere Pyramide ABCG werde eben so und nach gleicher Anzahl zerlegt; so ist (12, 4. S.) ABC: DEF = die Prismen in Pyr. ABCG: den Prismen in Pyr. DEFH. Aber ABC: DEF = Pyr. ABCG: Q; folglich Pyr. ABCG: Q = die Prismen in Pyr. ABCG: den Prismen in Pyr. DEFH. Nun ist Pyr. ABCG > die in ihr enthaltenen Prismen; also ist auch (5, 14. S.) Q > die in Pyr. DEFH befindlichen Prismen. Nun war vorhin Q < als solche Prismen; welches einander widerspricht. Folglich ist auch nicht ABC: DEF: Pyr. ABCG einem Körper der < Pyr. DEFH. Eben so wird bewiesen, daß auch nicht DEF: ABC = Pyr. DEFH: einem Körper der < Pyr. ABCG.

Zweyter Fall. Es sey ein Körper Z > Pyr. DEFH, also ABC: DEF = Pyr. ABCG: Z.

Folglich umgekehrt DEF: ABC = Z: Pyr. ABCG. Nun ist (5, 14. S.) Z: Pyr. ABCG = Pyr. DEFH: einem Körper der < Pyr. ABCG, weil Z > Pyr. DEFH; daher DEF: ABC = Pyr. DEFH: einem Körper der < Pyr. ABCG; welches ungereimt ist. Folglich ist auch nicht ABC: DEF = Pyr. ABCG: Z. Nun war gezeigt, daß auch nicht ABC: DEF = Pyr. ABCG: Q, wenn Q < Pyr. DEFH. Folglich ist ABC: DEF = Pyr. ABCG: Pyr. DCFH.

Note: Nahe am Ende des Beweises heißt es im Grundtexte: „ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, wie vorhin gezeigt worden.“ Diese Worte kommen wieder am Ende des 18. S. dieses Buches vor. Wenn nicht vielleicht mit diesen Worten der unnütze Lehnsatz hinter den 2. Satze

gemeynt wird, so ist dieß nirgends gezeigt worden. Vielleicht ließ es ein unkundiger Herausgeber des Grundtextes aus, und vergaß, jene Worte gleichfalls durchzustreichen.

Der 6. Satz.

Text: Lehrsatz. Vielseitige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCDEL, FGHIKM, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABCDE, FGHIK.

Zerlege die Grundfläche ABCDE in die Triangel ABC, ACD, ADE, die Grundfläche FGHIK in die Triangel FGH, FHI, IFK. Stelle dir über jedem der ersten Triangel eine Pyramide vor, deren Gipfel L, und über jedem von diesen Triangeln eine, deren Gipfel M sey.

Da (12, 5. S.) △ ABC: △ FGH = Pyr. ABCL: Pyr. FGHM; △ ACD: △ FGH = Pyr. ACDL: Pyr. FGHM; und △ ADE: △ FGH = Pyr. ADEL: Pyr. FGHM; so ist (5, 24. Zus. 2) ABCDE: △ FGH = Pyr. ABCDEL: Pyr. FGHM. Aus demselben Grunde ist FGHIK: △ FGH = Pyr. FGHIKM: Pyr. FGHM; und umgekehrt △ FGH: FGHIK = Pyr. FGHM: Pyr. FGHIKM. Folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen ABCDE: FGHIK = Pyr. ABCDEL: Pyr. FGHIKM.

Note: Wir haben den Beweis dieses Satzes etwas abgekürzt. Der Verfasser desselben braucht gegen das Ende hin den 5, 22. S. aus Unkunde zwey Mahle; als wenn dieser Satz nicht von beliebig vielen, sondern nur von drey Größen, die mit eben so vielen andern Größen, je zwey und zwey, proportionirt sind, gölte.

Der 7. Satz.

Text: Zusatz 2. Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen; weil (12, 6. S.) Pyramiden über denselben Grundflächen und von derselben Höhe sich wie die Grundflächen verhalten.

Der 8. Satz.

Text: Lehrsatz. (Fig. 72.) Aehnliche dreyseitige Pyramiden, ABCG, DEFH, sind in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seiten, BC, EF.

Vollende die Parallelogramme ABCM, GBCN, ABGK, und das Parallelepipedon BGML, das von diesen, und den ihnen gegenüber stehenden, Ebenen begrenzt wird. Vollende ferner das Parallelepipedon EHPO, begrenzt von den drey Parallelogrammen DEFP, HEFR, DEHX und denen, so ihnen gegenüber liegen.

Da Pyr. ABCG ∽ Pyr. DEFH; so ist (Simf. T. 11, 11. E.) ABC = DEF; GBC = HEF; ABG = DEH; auch ist (6, 1. E.) AB:BC = DE:EF; folglich ist Parallelog. BM ∽ Par. EP; aus gleichen Gründen auch Par. BN ∽ Par. ER, und Par. BK ∽ Par. EX. Also sind die drey Parallelogramme BM, BN, BK denen dreyen EP, ER, EX ähnlich. Aber die drey BM, BN, BK sind (11, 24. S.) den dreyen, ihnen gegenüber stehenden gleich und ähnlich, und eben so die drey EP, ER, EX denen, die ihnen gegenüber stehen. Folglich werden die Körper BGML, EHPO von gleich vielen, ähnlichen Ebenen begrenzt, und (11, B. S.) ihre körperlichen Winkel sind gleich. Daher ist (Simf. T. 11, 11. E.) Körper BGML ∽ Körper EHPO. Folglich (11, 33. S.) BGML:EHPO = 3. (BC:EF). Nun ist (5, 15. S.) BGML:EHPO = Pyr. ABCG: Pyr. DEFH, denn die Pyramide ist der sechste Theil des Parallelepipedons, wovon das Prisma, welches das

Drey-

Dreyfache (12, 7. S.) solcher Pyramide ist, die Hälfte (11, 28. S.) ist. Folglich ist Pyr. ABCG: Pyr. DEFH = 3. (BC: EF).

Zusatz. [Wie im Grundtexte.]

Note zum Zusatze: Der Beweis für den Zusatz ist unvollkommen; denn es ist nicht gezeigt, daß die Pyramiden, in welche die vielseitigen Pyramiden zerlegt worden, einander ähnlich sind. Dieß hätte allerdings bewiesen werden müssen; ist auch in dem ähnlichen Falle des folgenden 12. Satzes geschehen. Der vollständige Beweis ist folgender:

Es seyen (Fig. 73.) ABCDEM, FGHKLN ähnliche und ähnlich liegende vielseitige Pyramiden; so ist ABCDEM: FGHKLN = 3. (AB: FG).

Zerlege die vielseitigen Grundflächen in die Triangel ABE, EBC, ECD; FGL, LGH, LHK, welche (6, 20. S.), jeder für sich, einander ähnlich sind. Da die Pyramiden ähnlich sind; so ist (Simf. T. 11, 11. E.) △ AEM ∽ △ LFN, und △ ABM ∽ △ FGN. Folglich (6, 4. S.) ME: EA = NL: LF. Nun ist △ EAB ∽ △ LFG; folglich AE: EB = FL: LG; daher aus dem Gleichen ME: EB = NL: LG. Eben so wird bewiesen, daß EB: BM = LG: GN. Folglich wieder aus dem Gleichen EM: MB = LN: NG. Folglich sind die Seiten der Triangel EMB, LNG proportionirt; also sind (6, 5. S.) diese Triangel gleichwinklig und ähnlich. Daher sind die Pyramiden, deren Grundflächen die Triangel EAB, LFG, und Gipfel M, N sind, ähnlich; da (11, B. S.) ihre körperlichen Winkel gleich sind, und sie selbst von gleich vielen, ähnlichen Ebenen begrenzt werden. Aehnliche Schlüsse führen auf die Aehnlichkeit der Pyramiden EBCM, LGHN, und ECDM, LHKN. Folglich ist (12, 8. S.) Pyr. EABM: Pyr. LFGN = 3 (EB: LG); Pyr. EBCM: Pyr. LGHN = 3 (EB: LG); folglich Pyr. EABM: Pyr. LFGN = Pyr. EBCM: Pyr. LGHN. Aus gleichen Gründen ist

Pyr.

Pyr. EBCM: Pyr. LGHN = Pyr. ECDN: Pyr. LHKN. Folglich (5, 12. S.) Pyr. EABM: Pyr. LFGN = Pyr. ABCDEM: Pyr. FGHKLN. Nun ist Pyr. EABM: Pyr. LFGN = 3 (AB:FG); folglich Pyr. ABCDEM: Pyr. FGHKLN = 3 (AB:FG).

Der 10. bis 12. Satz.

Note: Der erste Theil des 12. S. läßt sich wörtlich so beweisen, wie der erste Theil des 11. Satzes. Man darf also hier das Nähmliche nicht wieder beweisen, sondern kann es aus dem 11. Satze annehmen.

Die Beweise des 10. und 11. Satzes scheinen von verschiedenen Verfassern herzurühren. Denn in dem ersten dieser Sätze wird die Gleichheit der Pyramide auf dem in den Kreis gezeichneten Quadrate und der Hälfte der auf dem um den Kreis gezeichneten Quadrate stehenden Pyramide mittelst Prismen auf denselben Grundflächen bewiesen; dieß aber wird im 11. S. kürzer aus dem 6. dieses Buches dargethan.

Der 13. Satz.

Text: Lehrsatz. Wird ein Cylinder, AD, von einer Ebene, HG, den einander gegenüber liegenden Grundflächen, AB, CD, parallel geschnitten: so verhalten sich die abgeschnittenen Cylinder, BG, GD, wie ihre Axen, EI, IF.

Die schneidende Ebene GH treffe die Axe des Cylinders EF im Punkte I. Die Linie GH sey der gemeinsame Durchschnitt der Ebene GH und der Oberfläche des Cylinders AD. Der Cylinder AD entstehe durch die Umdrehung des Rectangels AEFC um die Seite EF, in jeder beliebigen Lage desselben. Auch sey die gerade

Linie

Linie GI der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebene GH und des Rectangels AEFC. Da die Parallelebenen AB, GH von der Ebene AEIG geschnitten werden; so sind (11, 16. S.) AE, GI parallel. Folglich ist AI ein Parallelogramm, folglich IG = EA = dem Halbmesser des Kreises AB. Aus gleichen Gründen folgt, daß alle aus I nach der Linie GH gezogene gerade Linien den Halbmessern des Kreises AB, also unter sich, gleich sind. Daher ist GH der Umkreis eines Kreises um den Mittelpunkt I. Folglich zerlegt die Ebene GH den Cylinder AD in die Cylinder AH, GD; denn solche Cylinder entstehen durch Umdrehung der Parallelogramme AI, GF um die geraden Linien EI, IF.

Verlängere u. s. w. [in der deutschen Uebersetzung.]

Note: In diesem Satze wird angenommen, daß der gemeinschaftliche Durchschnitt des Cylinders mit einer der Grundflächen parallelen Ebene ein Kreis sey. Dieß bedurfte, unsers Erachtens, eines kurzen Beweises, den wir gegeben haben. Daraus ergibt sich denn auch, daß gedachte Ebene den Cylinder in zwey andere Cylinder zerlege. Dasselbe muß auch beym 14. Satz ergänzt werden.

Der 15. Satz.

Text: Lehrsatz. Sind Kegel, oder Cylinder, gleich; so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen. Und verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen: so sind die Kegel sowohl als auch die Cylinder gleich.

Es seyen der gleichen Kegel und Cylinder Grundflächen die Kreise ABCD, EFGH, deren Durchmesser AC, EG; Axen IK, LM, welche der Kegel und Cylinder Höhen sind. Die Kegel seyen AKC, EMG, die Cylinder AN, EO.

Er-

Ersten Theils erster Fall. Die Höhen IK, LM sind gleich. Nun ist Cyl. AN = Cyl. EO; folglich (12, 11. S.) AN : EO = AC : EG. Daher (5, A. S.) Grundfl. ABCD = Grundfl. EFGH. Folglich ABCD : EFGH = LM : IK.

Ersten Theils zweyter Fall. Die Höhen IK, LM sind nicht gleich, sondern LM > IK. Nimm in LM ein Stück LP = IK, und schneide den Cylinder EO mit einer Ebene STR parallel seinen Grundflächen QO, EG; so ist der gemeinsame Durchschnitt solcher Ebene und der Oberfläche des Cylinders ein Kreis, und ER ein Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis EFGH und Höhe LP ist. Da Cyl. AN = Cyl. EO; so ist (5, 7. S.) Cyl. AN : Cyl. ER = Cyl. EO : Cyl. ER. Nun ist (12, 11. S.) Cyl. AN : Cyl. ER = ABCD : EFGH, und (12, 13. S.) Cyl. EO : Cyl. ER = LM : LP; folglich ABCD : EFGH = LM : LP. Nun ist LP = IK; daher ABCD : EFGH = LM : IK.

Zweyten Theils erster Fall. Die Grundflächen ABCD, EFGH sind gleich. Da ABCD : EFGH = LM : IK; so ist (5, A. S.) LM = IK; folglich (12, 11. S.) Cyl. AN = Cyl. EO.

Zweyten Theils zweyter Fall. Die Grundflächen ABCD, EFGH sind ungleich, und zwar ABCD > EFGH. Da ABCD : EFGH = LM : IK, so ist (5, A. S.) LM > IK. Ist nun die Construction wie vorher, so ist, weil in ABCD : EFGH = LM : IK die IK = LP ist, (12, 11. S.) ABCD : EFGH = Cyl. AN : Cyl. ER. Aber LM : IK = Cyl. EO : Cyl. ER; folglich Cyl. AN : Cyl. ER = Cyl. EO : Cyl. ER. Daher ist Cyl. AN = Cyl. EO. Dasselbe gilt auch von den Kegeln.

Note: „Und vollende die Cylinder AN, EO.“ Aber der Satz setzt die Kegel und Cylinder als schon construirt voraus. Daher muß wohl statt obiger Worte

des Grundtextes gelesen werden: „Die Kegel seyen AKC, EMG; die Cylinder AN, EO.“

Im zweyten Theile des Beweises vermisset man den ersten Fall; auch fehlt Einiges bey dem zweyten Falle vor den Worten: „Ist nun die Construction wie vorher.“ Beydes haben wir zugesetzt.

Lehnsatz.

[Text hinter dem 17. Satze.]

Sind (Fig. 74. und 75.) in zwey, in Kreise, deren Mittelpunkte K, L sind, gezeichneten Trapezen ABCD, EFGH die Seiten AB, DC, so wie EF, HG parallel, die vier übrigen Seiten aber AD, BC, EH, FG gleich, AB größer als EF, und DC größer als HG: so ist der Halbmesser des Kreises, worin die größern Seiten, KA, größer als der Halbmesser des Kreises, worin die kleinern sind, LE.

Gesetzt, es wäre KA nicht > LE; so ist KA entweder = oder < LE.

Es sey zuerst KA = LE. Da also in gleichen Kreisen die AD, BC, denen EH, FG gleich sind: so sind auch (3, 28. S.) die Bogen AD, BC den Bogen EH, FG gleich. Nun ist AB > EF, DC > HG; folglich Bog. AB > Bog. EF, und Bog. DC > Bog. HG. Folglich ist der ganze Umkreis ABCD > als der ganze Umkreis EFGH. Nun waren aber beyde Umkreise einander gleich; welches dem Vorigen widerspricht. Folglich ist KA nicht = LE.

Es sey zweytens KA < LE. Mache LM = KA; zeichne mit LM um den Punkt L den Kreis MNOP, der die geraden Linien LF, LG, LH, LE in den Punkten N, O, P, M treffe, und ziehe MN, NO OP, PM. Diese Linien sind (6, 2. S.) den Linien EF, FG, GH, HE parallel und kleiner als solche, in der Ord-

Ordnung, wie sie genannt worden. Da also EH > MP, so ist auch AD > MP. Aber Kr. ABCD = Kr. MNOP; folglich Bog. AD > Bog. MP. Aus demselben Grunde ist Bog. BC > Bog. NO. Da AB > EF, EF > MN; so ist um so mehr AB > MN. Folglich Bog. AB > Bog. MN. Aus gleichem Grunde ist Bog. DC > Bog. PO. Folglich der ganze Umkreis ABCD > als der ganze Umkreis MNOP. Nun sind aber auch beyde Umkreise sich gleich; welches einander widerspricht. Folglich ist KA nicht < LE. Nun war auch KA nicht = LE. Daher KA > LE.

Zusatz. Sind in einem gleichschenkligen Triangel die Schenkel denen AD, BC gleich, aber die Grundlinie ist kleiner als AB, die größere von den beyden AB, DC: so läßt sich auf ähnliche Art beweisen, daß KA größer als der Halbmesser des um solchen Triangel gezeichneten Kreises sey.

Der 17. Satz.

Text: Aufgabe: (Fig. 76.) Es sind zwey concentrische Kugeln gegeben; man soll in die größere ein Polyeder zeichnen, dessen Oberfläche die kleinere Kugel nicht berühre.

Man stelle sich beyde Kugeln um den Mittelpunkt A vor.

Nimmt man an, daß die Kugeln mit einer Ebene durch ihren gemeinsamen Mittelpunkt geschnitten werden; so sind die Durchschnitte Kreise, weil die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen unverrückten Durchmesser construirt wird. Folglich, in welcher Lage man sich auch den Halbkreis denkt, so bildet seine Ebene auf der Oberfläche der Kugel einen Kreis. Bekanntlich ist dieser alle Mahl ein größter Kreis, da der Durchmesser der Kugel zugleich des Kreises Durchmesser und (3, 15.

S.) größer als alle, im Kreise oder in der Kugel gezogene, gerade Linien ist.

Es sey demnach BCDE ein Kreis der größern, FGH ein Kreis der kleinern Kugel, deren Durchmesser BD, CE sich unter rechten Winkeln schneiden. In den größern dieser concentrischen Kreise BCDE zeichne (12, 16. S.) ein gleichseitiges Polygon von gerader Seitenzahl, das den kleinern Kreis FGH nicht berührt, und dessen Seiten in des Kreises Quadranten BE die Linien BK, KL, LM, ME sind. Ziehe KA und verlängere sie bis N. Errichte auf des Kreises BCDE Ebene in A einen Perpendikel AX, der die Kugeloberfläche in X treffe, und lege durch AX, BD, KN Ebenen, welche, nach dem Obigen, auf der Kugelfläche größte Kreise machen, von welchen BXD, KXN über den Durchmessern BD, KN Halbkreise seyen. Da XA auf der Kreisebene BCDE perpendikular ist; so sind auch (11, 18. S.) alle durch solche Linie gelegte Ebenen auf der Kreisebene BCDE perpendikular, folglich auch die Halbkreise BXD, KXN. Da die Halbkreise BED, BXD, KXN, wegen Gleichheit ihrer Durchmesser BD, KN gleich sind, so sind auch ihre Quadranten BE, BX, KX gleich. So viele Polygonseiten also im Quadranten BE sind, so viele sind deren auch in den Quadranten BX, KX, und den Seiten BK, KL, LM, ME gleich. In BX seyen sie BO, OP, PR, RX; in KX aber KS, ST, TY, YX. Ziehe OS, PT, RY, und fälle aus den Punkten O, S auf die geraden Linien AB, AK die Perpendikel OV, SQ. Da also die Ebene BOXD auf der Ebene BCDE perpendikular, und in der BOXD auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt AB der Perpendikel OV gezogen ist, so ist (11, 4. E.) OV auf der Ebene BCDE perpendikular. Aus demselben Grunde ist SQ auf derselben Ebene perpendikular, weil die Ebene KSXN auf BDCE perpendikular ist. Ziehe VQ. Da in gleichen Halbkreisen BXD, KXN gleiche Bogen BO, KS genommen, und OV, SQ auf

der

der Kreise Durchmessern perpendikular sind; so ist OV = SQ, und BV = KQ. Nun ist BA = KA; also auch VA = QA. Daher BV : VA = KQ : QA; daher (6, 2. S.) VQ der BK parallel. Da OV, SQ auf der Kreisebene BCDE perpendikular sind; so ist (11, 6. S.) OV der SQ parallel. Nun war auch OV = SQ; folglich sind (1, 33. S.) QV, SO gleich und parallel. Da QV der SO so wohl als auch der KB parallel ist; so ist (11, 9. S.) SO der BK parallel. Folglich sind die verbindenden BO, KS mit den Parallellinien OS, BK in einerley Ebene, also die vierseitige Figur KBOS in Einer Ebene. Ziehet man aber PB, TK und von den Punkten P, T auf AB, AK Perpendikel; so läßt sich zeigen, daß TP der KB parallel ist. Folglich ist (11, 9. S.) TP der SO parallel, mithin die vierseitige Figur SOPT in Einer Ebene. Aus gleichem Grunde ist die vierseitige Figur TPRY in Einer Ebene. Nun liegt auch (11, 2. S.) die Figur YRX in Einer Ebene. Denkt man sich also von den Punkten O, S, P, T, R, Y nach A gerade Linien gezogen, so hat man zwischen den Bogen BX, KX einen Polyedrischen Körper, der aus Pyramiden bestehet, deren Grundflächen die vierseitigen Figuren KBOS, SOPT, TPRY, der Triangel YRX sind, und Gipfel der Punkt A ist. Wird nun auf den Seiten KL, LM, ME eben so wie auf BK, deßgleichen in den drey übrigen Quadranten und der andern Halbkugel construirt: so entstehet in der Kugel ein Polyeder, aus Pyramiden zusammengesetzt, deren Grundflächen die vorhin gedachten vierseitigen Figuren und der Triangel YRX, in einerley Ordnung, sind, deren Gipfel aber A ist.

Dieses Polyeders Oberfläche berührt die kleinere Kugel, auf welcher der Kreis FGH ist, nicht.

Fälle (11, 11. S.) aus dem Punkte A auf die Ebene der vierseitigen Figur KBOS den Perpendikel AZ, der sie in Z trifft, und ziehe BZ, ZK; so ist AZ auf BZ, ZK perpendikular. Da AB = AK, und □ AB =

□

□ AZ + □ ZB, aber □ AK = □ AZ + □ ZK; so ist □ AZ + □ ZB = □ AZ + □ ZK, folglich, wenn man □ AZ auf beyden Seiten wegnimmt, □ ZB = □ ZK; also ZB = ZK. Auf ähnliche Art läßt sich erweisen, daß die von Z an die Punkte O, S gezogenen geraden Linien denen BZ, ZK gleich sind. Daher gehet ein um den Mittelpunkt Z mit dem Halbmesser ZB gezeichneter Kreis durch die Punkte K, O, S, und die vierseitige Figur KBOS ist in solchem Kreise. Da KB > QV, aber QV = SO; so ist KB > SO; aber KB = BO = KS; folglich ist jeder der gleichen Bogen, welche die geraden Linien KB, BO, KS vom Umkreise KBOS abschneiden, größer als der durch OS abgeschnittene Bogen. Folglich sind jene drey Bogen zusammen nebst einem vierten, der einem von ihnen gleich ist, größer, als dieselben drey nebst dem durch OS abgeschnittenen Bogen, das ist, größer als der ganze Umkreis; folglich ist der Bogen KB des Umkreises KBOS größer als der vierte Theil desselben Umkreises, und daher der Mittelpunktwinkel BZK > R. Da also BZK stumpf ist; so ist (2, 12. S.) □ BK > □ BZ + □ ZK; das ist, > 2 □ BZ. Ziehe KV. Da in den Triangeln KBV, OBV die KB = OB, BV = BV, und gleiche Winkel einschließen; so ist (1, 4. S.) KVB = OVB. Nun ist OVB = R; also KVB = R. Da BD < 2. DV; so ist DB × BV < 2 (DV × VB), das ist (6, 8. S.) □ BK < 2. □ KV. Aber □ KB > 2. □ BZ; folglich □ KV > □ BZ. Da BA = AK, und □ BZ + □ ZA = □ BA, aber □ KV + □ VA = □ AK; so ist □ BZ + □ ZA = □ KV + □ VA. Nun ist □ KV > □ BZ; folglich □ VA < □ ZA, also AZ > AV, also um so mehr AZ > AG; denn im vorigen Satze ist gezeigt, daß die gerade Linie KV außerhalb des Kreises FGH falle. Nun ist AZ auf der Ebene KBOS perpendikular, folglich die kleinste Linie, die sich vom Mittelpunkte aus auf gedachte Ebene ziehen läßt. Folglich fällt die Ebene KBOS außerhalb der kleinern Kugel.

Daß

Daß die übrigen Ebenen zwischen den Quadranten BX, KX außerhalb der kleinern Kugel fallen, läßt sich so zeigen. Fälle aus A auf die vierseitige Ebene SOPT den Perpendikel AI, und ziehe IO. Wie für die Ebene KBOS und den Punkt Z läßt sich zeigen, daß der Punkt I der Mittelpunkt des um die vierseitige Figur SOPT gezeichneten Kreises, OS > PT sey. Nun ist gezeigt, daß PT der OS parallel ist. Da also die im Kreise gezeichneten Trapeze KBOS, SOPT die parallelen Seiten BK, OS, auch OS, PT haben, die übrigen Seiten BO, KS, OP, ST aber gleich sind, und BK > OS, OS > PT ist: so ist (vorst. Lehns.) ZB > IO. Ziehe AO = AB. Da AIO = R = AZB; so ist □AI + □IO = □AO = □AB = □AZ + □ZB. Nun ist □ZB > □IO; folglich □AZ < □AI, also AZ < AI. Nun ist nach dem Bewiesenen AZ > AG; also um so mehr AI > AG. Folglich fällt die Ebene SOPT außerhalb der kleinern Kugel. Aehnliche Schlüsse geben, daß auch die Ebene TPRY außerhalb derselben Kugel liege, wie auch der Triangel YRX, nach dem Zusatze zum vorstehenden Lehnsatze. Auf ähnliche Weise wird bewiesen, daß alle übrigen, das Polyeder begrenzende, Ebenen außerhalb der kleinern Kugel liegen.

Ohne Hülfe des 16. S. läßt sichs kürzer darthun, daß AZ > AG sey. [Siehe die deutsche Uebersetzung.]

Zusatz. Verbindet man die Punkte, in welchen die aus dem Mittelpunkte A, nach allen Winkeln des in die größere Kugel gezeichneten Polyeders, gezogenen geraden Linien die Oberfläche der kleinern treffen, in eben der Ordnung durch gerade Linien, wie die Punkte, worin vorgedachte Linien der Oberfläche der größern Kugel begegnen: so entstehet in der kleinern Kugel ein Polyeder. Hier ist die Verhältniß des in die größere Kugel gezeichneten Polyeders zu dem in der kleinern das Dreyfache der Verhältniß des Durchmessers der größern zum Durchmesser der kleinern. Denn zerlegt man beyde Polyeder

in

in eine gleiche Anzahl von Pyramiden von einerley Ordnung: so sind solche Pyramiden ähnlich. Sie haben nähmlich die körperlichen Winkel am Gipfel, als am Mittelpunkte A, gemein; die übrigen körperlichen Winkel an den Grundflächen aber sind (11, B. S.) gleich, weil sie von drey ebenen Winkeln eingeschlossen werden, die, jeder für sich, gleich sind; sie werden von gleich vielen ähnlichen Ebenen begrenzt: folglich sind sie (Simf. E. 11, 11. E.) ähnlich. Aehnlicher Pyramiden Verhältniß aber (12, 8. Zuf.) ist das Dreyfache der Verhältniß ihrer homologen Seiten. Folglich ist Pyr. KBOSA: Pyr. in der kleinern Kugel von derselben Ordnung = 3 (AB : AH). Dasselbe läßt sich von jedem Paare gleichmäßig zusammengeordneter Pyramiden der größern und kleinern Kugel darthun. Folglich ist (5, 12. S.) Polyeder der größern: Polyeder der kleinern Kugel = 3 (AB : AH) = 3 (BD : FH.)

Note: Die Worte des Satzes im Grundtexte: *εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν*, werden von Commandini und andern Interpreten so übersetzt: „In die größere Kugel ein Polyeder zu zeichnen, „das der kleinern Kugel Oberfläche nicht berühre." Sie beziehen nähmlich die Worte *κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν* auf die unmittelbar vorhergehenden *τῆς ἐλάσσονος σφαίρας*. Allein so kann man nicht übersetzen. Denn das Polyeder berührt und durchschneidet ja nicht nur die Oberfläche der kleinern Kugel, sondern auch diese Kugel selbst. Man muß also gedachte Worte auf *τὸ στερεὸν πολύεδρον* beziehen, und übersetzen: in die größere Kugel ein Polyeder zu zeichnen, dessen Oberfläche die kleinere Kugel nicht berühre. Diese Uebersetzung fordert offenbar der Sinn der Aufgabe.

Der Beweis des Satzes aber ist verderbt und verstümmelt. Was leicht ist, ist weitläufig bewiesen, und was minder einleuchtet, unerläutert gelassen. So z. B. wird

wird im ersten Beweise behauptet, daß □ KB > 2. □ BZ, und im zweyten, daß BZK stumpf sey; Beydes mußte allerdings bewiesen werden. Ueber dieß heißt es in dem ersten Beweise, „Ziehe aus K auf BD den Perpendikel KΩ;" soll heißen, „Ziehe KV" von der zu beweisen war, daß sie auf BD perpendikular sey. Aus der Figur in Hervagius und Gregory's Ausgaben, und selbst aus dem Texte, ergibt sich, daß der Herausgeber des gegenwärtigen Griechischen Textes nicht bemerkte, daß der aus K auf BD gezogene Perpendikel nothwendig den Punkt V treffe; in den Figuren vorgedachter Ausgaben trifft er einen von V verschiedenen Punkt Ω, und im Beweise werden diese Punkte als verschieden genommen, denn sie werden mit verschiedenen Buchstaben V und Ω bezeichnet. Dieß scheint jedoch Commandini nicht entgangen zu seyn, denn er bezeichnet in seiner Figur einerley Punkt mit zwey Buchstaben V, Ω. Schon vor Commandini machte der gelehrte Johann Dee in dem Commentar zu diesem Satze, in der von Heinrich Billingsley verfertigten Englischen Uebersetzung, die zu London 1570 gedruckt wurde, auf diesen Irrthum aufmerksam, und gab einen der im Grundtexte vorkommenden Construction angemessenen Beweis, worin er nähmlich zeigt, daß der aus K nach BD gezogene Perpendikel nothwendig V treffe.

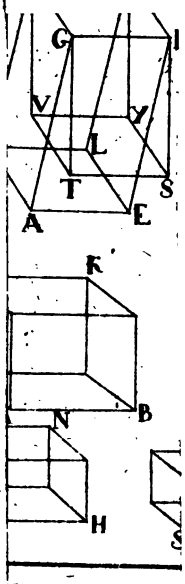
Außer dem wird nicht bewiesen, daß die vierseitigen Figuren SOPT, TPRY, und der Triangel YRX die kleinere Kugel nicht berühren, was doch bewiesen werden mußte. Der einzige Clavius bemerkte dieß, so viel ich weiß, und bewies es mittelst eines Lehnsatzes, den wir, etwas abgeändert und kürzer bewiesen, diesem Satze vorangeschickt haben.

Der Zusatz des Satzes nimmt an, daß auch in die kleinere Kugel ein, dem in der größern ähnliches, Polyeder gezeichnet sey. Da aber die Construction dazu nicht angegeben ist, so hielten wir es für rathsam, sie darzulegen,

legen, und zugleich die Aehnlichkeit der gleichmäßig geordneten Pyramiden dieses und des größern Polyeders in der Kugel BCDE zu beweisen.

Aus dem Vorhergehenden erhellet zur Genüge, wie sehr die Elemente des Euklides, des bündigsten und sorgsamsten Geometers, von unwissenden Herausgebern verdorben und verstümmelt worden sind. Die vortheilhafte Meynung, welche die meisten Gelehrten von dem gegenwärtigen Grundtexte, als einer von Euklides Originale gar nicht oder nur äußerst wenig abweichenden Abschrift, hegten, leitete sie irre, und hinderte sie, in der Prüfung derselben sorgfältiger zu seyn. Daher übersahe man denn, von Theon bis auf unsere Zeit, mehrere, und oft recht bedeutende, Fehler. Wir dürfen daher hoffen, daß Denker, die einen richtig geführten Beweis von einem fehlerhaften zu unterscheiden wissen, der Mühe, die wir auf die Wegräumung jener Mängel und die Zurückführung dieser Bücher zu ihrer ursprünglichen Fehlerlosigkeit gewandt haben, ihren Beyfall nicht versagen werden.

Magdeburg,
gedruckt in der Günther und Hänelschen Hofbuchdruckerey.



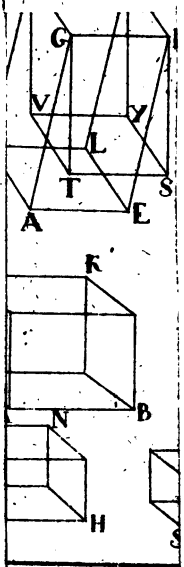
UNIV. OF MICH.

legen, und zugleich die Aehnlichkeit der gleichmäßig geordneten Pyramiden dieses und des größern Polyeders in der Kugel BCDE zu beweisen.

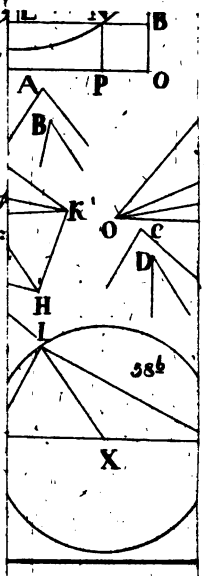
Aus dem Vorhergehenden erhellet zur Genüge, wie sehr die Elemente des Euklides, des bündigsten und sorgsamsten Geometers, von unwissenden Herausgebern verdorben und verstümmelt worden sind. Die vortheilhafte Meynung, welche die meisten Gelehrten von dem gegenwärtigen Grundtexte, als einer von Euklides Originale gar nicht oder nur äußerst wenig abweichenden Abschrift, hegten, leitete sie irre, und hinderte sie, in der Prüfung derselben sorgfältiger zu seyn. Daher übersahe man denn, von Theon bis auf unsere Zeit, mehrere, und oft recht bedeutende, Fehler. Wir dürfen daher hoffen, daß Denker, die einen richtig geführten Beweis von einem fehlerhaften zu unterscheiden wissen, der Mühe, die wir auf die Wegräumung jener Mängel und die Zurückführung dieser Bücher zu ihrer ursprünglichen Fehlerlosigkeit gewandt haben, ihren Beyfall nicht versagen werden.

Magdeburg,

gedruckt in der Günther und Hänelschen Hofbuchdruckerey.



UNIV. OF MICH.


B
A
P
O
B
K
O
c
D
H
I
X